

第1問

[1]

$$t = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} t^2 &= (\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta)^2 \\ &= 2 \cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \underline{2 \cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 1} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} y &= \cos 2\theta + \sqrt{3} \sin 2\theta - 2\sqrt{3} \cos \theta - 2 \sin \theta \\ &= (2 \cos^2 \theta - 1) + \sqrt{3} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta - 2(\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta) \\ &= (2 \cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta) - 2(\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta) - 1 \\ &= (t^2 - 1) - 2t - 1 \\ &= \underline{t^2 - 2t - 2} \end{aligned}$$

となる．また

$$t = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = \underline{2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)}$$

である． $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ により

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{6} &\leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} \\ -\frac{1}{2} &\leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

であるから， t のとり得る値の範囲は

$$\underline{-1 \leq t \leq \sqrt{3}}$$

したがって， $y = (t-1)^2 - 3$ は

$$\underline{t = 1}$$

すなわち

$$\begin{aligned} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) &= \frac{1}{2} \\ \theta + \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{6} \\ \underline{\theta = -\frac{\pi}{6}} &\text{ のとき，最小値 } \underline{-3} \text{ をとる} \end{aligned}$$

[2]

①は

$$12(\log_2 x^{\frac{1}{2}})^2 - 7\log_4 x - 10 > 0$$

$$12\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2 - 7\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 4}\right) - 10 > 0$$

$$3(\log_2 x)^2 - 7 \cdot \frac{\log_2 x}{2} - 10 > 0$$

$$\underline{6X^2 - 7X - 20 > 0}$$

$$(3X + 4)(2X - 5) > 0$$

$$\underline{X < -\frac{4}{3}, \frac{5}{2} < X}$$

$$\log_2 x < -\frac{4}{3}, \frac{5}{2} < \log_2 x$$

$$x < 2^{-\frac{4}{3}}, 2^{\frac{5}{2}} < x$$

$$0 < x < \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}}, 4\sqrt{2} < x$$

これを満たす最小の自然数 x は $x = 6$

②は

$$\log_3 x < 14 - x$$

$$\log_3 x < \log_3 3^{14-x}$$

$$0 < x < 3^{14-x}$$

これを満たす最大の自然数 x は $x = 11$

第2問

$$C: y = x^2$$

$$y' = 2x$$

$x = a$ における接線は

$$y - a^2 = 2a(x - a)$$

$$l: \underline{y = 2ax - a^2}$$

l が x 軸と交わる点 Q の座標は

$$\underline{Q\left(\frac{a}{2}, 0\right)}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a x^2 dx - \text{PHQ} \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a^2 \\ &= \underline{\frac{a^3}{12}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \int_a^2 \{x^2 - (2ax - a^2)\} dx = \int_a^2 (x - a)^2 dx = \left[\frac{(x - a)^3}{3} \right]_a^2 \\ &= \frac{(2 - a)^3}{3} = \underline{-\frac{a^3}{3} + 2a^2 - 4a + \frac{8}{3}} \end{aligned}$$

$$U = S + T = \frac{a^3}{12} + \frac{(2 - a)^3}{3} = -\frac{1}{4}a^3 + 2a^2 - 4a + \frac{8}{3} \quad (= f(a) \text{ とおく})$$

$$f'(a) = -\frac{1}{4}(3a - 4)(a - 4)$$

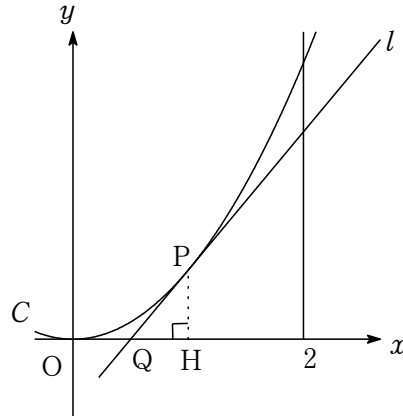
a	0	...	$\frac{4}{3}$...	2
$f'(a)$		-	0	+	
$f(a)$	$\frac{8}{3}$	\searrow	$\frac{8}{27}$	\nearrow	$\frac{2}{3}$

U は

$$\underline{a = 0 \text{ で最大値 } \frac{8}{3},}$$

$$\underline{a = \frac{4}{3} \text{ で最小値 } \frac{8}{27}}$$

をとる.



第3問

$$x_1 = 1, x_2 = 2 \text{ より}$$

$$x_3 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 = \frac{7}{4}$$

$$y_1 = x_2 - x_1 = \underline{1}$$

$$x_{n+1} - x_{n+2} = \frac{1}{4}(x_{n+1} - x_n)$$

$$\underline{y_{n+1} = \frac{-1}{4}y_n}$$

したがって, $\{y_n\}$ は等比数列であるから

$$y_n = 1 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1} = \underline{\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}} \quad \boxed{\text{キ}} \cdots \textcircled{0}$$

$$x_{n+1} - x_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \text{ であるから}$$

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

$$= 1 + \frac{1 \cdot \left\{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)}$$

$$= \underline{\frac{9}{5} - \frac{4}{5} \left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}} \quad (n=1 \text{ でも成立}) \quad \boxed{\text{サ}} \cdots \textcircled{0}$$

$$r = \frac{1}{4} \text{ とおくと}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n k \left| \left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1} \right| = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^n k r^{k-1}$$

であり

$$S_n = 1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots + nr^{n-1}$$

$$-rS_n = \frac{r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n}{\phantom{r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n}}$$

$$S_n - rS_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} - nr^n$$

$$(1-r)S_n = \frac{\sum_{k=1}^n r^{k-1} - nr^n}{\phantom{\sum_{k=1}^n r^{k-1} - nr^n}} \quad \boxed{\text{シ}} \cdots \textcircled{1}, \quad \boxed{\text{ス}} \cdots \textcircled{1}$$

$$= \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n$$

$$S_n = \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}$$

$$= \underline{\frac{16}{9} \left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} - \frac{n}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}} \quad \boxed{\text{ツ}} \cdots \textcircled{1}, \quad \boxed{\text{ナ}} \cdots \textcircled{0}$$

第4問

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \vec{OA} + (\vec{OC} - \vec{OB}) = \underline{\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}}$$

$$\vec{AL} = \vec{OL} - \vec{OA} = \frac{1}{3}\vec{OD} - \vec{OA} = \underline{-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}}$$

点Nは平面 α 上にあるから, $\vec{AN} = s\vec{AL} + t\vec{AM}$ と表せるので

$$\vec{ON} - \vec{OA} = s\vec{AL} + t(\vec{OM} - \vec{OA})$$

$$\vec{ON} - \vec{a} = s\left(-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) + t\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right)$$

$$\vec{ON} = \underline{\left(1 - \frac{2}{3}s - t\right)\vec{a} + \left(-\frac{s}{3} + \frac{t}{2}\right)\vec{b} + \frac{s}{3}\vec{c}}$$

一方, 点NはOC上にもあるので

$$\begin{cases} 1 - \frac{2}{3}s - t = 0 \\ -\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 0 \end{cases} \quad s = \frac{3}{4}, \quad t = \frac{1}{2}$$

これから, $\vec{ON} = \underline{\frac{1}{4}\vec{c}}$

$$AB = 2r \text{ より, } |\vec{b} - \vec{a}| = 2r$$

$$\text{両辺2乗して, } |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 4r^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{1 - 2r^2}$$

$$\angle BOC = 90^\circ \text{ より, } \vec{b} \cdot \vec{c} = \underline{0}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4 + 4r^2 \text{ より, } \vec{a} \cdot \vec{c} = \underline{-2r^2}$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{MN} = \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) = 0 \text{ より,}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$AB = 2r = \underline{\sqrt{2}}$$

第5問

(1) 1回戦のゲームの得点の仮平均を 30 とすると

$$\begin{aligned} A &= 30 + \frac{1}{15} \{3 + 14 + 0 + 8 + (-1) + (-4) + 13 + (-7) + (-2) + 4 + 3 + (-4) + 6 + 0 + (-3)\} \\ &= 30 + \frac{30}{15} = \underline{32.0} \end{aligned}$$

15人の合計点について

$$10A_1 + 5A_2 = 15A \quad \underline{\underline{\frac{2}{3}A_1 + \frac{1}{3}A_2 = A}}$$

(2) 2回戦の得点について表にすると次のようになる

番号	得点 u	$u - \bar{u}$	$(u - \bar{u})^2$
1	37	0	0
2	44	7	49
3	34	-3	9
4	35	-2	4
5	30	-7	49
7	41	4	16
10	38	1	1
11	33	-4	16
13	41	4	16
14	37	0	0
合計	370		160
平均	37		16(分散)

偏差の最大値は 7.0

分散 $V = \underline{16.00}$

標準偏差 $\sqrt{V} = \underline{4.0}$

(3) 3回戦の得点について表にすると次のようになる

番号	得点 v	$v - \bar{v}$	$(v - \bar{v})^2$
2	$D = 43 + x$	x	x^2
7	43	0	0
10	$E = 43 + y$	y	y^2
13	$F = 43 + z$	z	z^2
合計	43.0×4		6.50×4
平均	43.0		6.50

合計点より

$$(43 + x) + 43 + (43 + y) + (43 + z) = 43.0 \times 4$$

$$x + y + z = \underline{0}$$

最大値は D, 最小値は F で範囲が 7 であるから

$$x - z = \underline{7}$$

表の 3 列目の合計より

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6.50 \times 4 = \underline{26}$$

これらと, $z < y < 0 < x$ より, $x = 4, y = -1, z = -3$

$$\underline{D = 47, E = 42, F = 40}$$

(4) $(p, q) = (44, 44), (33, 33)$ がともにあるのは ②のみ

相関図が右上がりなので, p と q の間には正の相関がある ②

(5) 10 人について, $r = \frac{q - p}{p} \times 100$ の値が

$0 \leq r < 10$ となるのは, 番号 2, 5, 11 の 3人 **G = 3**

$10 \leq r < 20$ となるのは, 番号 1, 3, 10, 13 の 4人 **H = 4**