2011年度　数学Ⅱ・数学B　解答

第1問

[1]

$t=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ とおくと

$$\begin{aligned} t^2 &= (\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^2 \\ &= 2\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+(\sin^2\theta+\cos^2\theta) \\ &= \underline{\boldsymbol{2\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+1}} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} y &= \cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta-2\sqrt{3}\cos\theta-2\sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta-1)+\sqrt{3}\cdot 2\sin\theta\cos\theta-2(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta) \\ &= (2\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta)-2(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)-1 \\ &= (t^2-1)-2t-1 \\ &= \underline{\boldsymbol{t^2-2t-2}} \end{aligned}$$

となる．また

$$t=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=\underline{\boldsymbol{2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}}$$

である．$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq 0$ により

$$\underline{\boldsymbol{-\frac{\pi}{6}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{\pi}{3}}}$$
$$-\frac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるから，t のとり得る値の範囲は

$$\underline{\boldsymbol{-1\leqq t\leqq\sqrt{3}}}$$

したがって，$y=(t-1)^2-3$ は

$$\underline{\boldsymbol{t=1}}$$

すなわち

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$
$$\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$$

$\therefore$ $\underline{\boldsymbol{\theta=-\frac{\pi}{6}}}$ のとき，最小値 $\underline{\boldsymbol{-3}}$ をとる

[2]

①は

$$12(\log_2 x^{\frac{1}{2}})^2 - 7\log_4 x - 10 > 0$$

$$12\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2 - 7\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 4}\right) - 10 > 0$$

$$3(\log_2 x)^2 - 7\cdot\frac{\log_2 x}{2} - 10 > 0$$

$$\underline{\boldsymbol{6X^2 - 7X - 20 > 0}}$$

$$(3X+4)(2X-5) > 0$$

$$\therefore \underline{\boldsymbol{X < -\frac{4}{3},\ \frac{5}{2} < X}}$$

$$\log_2 x < -\frac{4}{3},\ \frac{5}{2} < \log_2 x$$

$$x < 2^{-\frac{4}{3}},\ 2^{\frac{5}{2}} < x$$

$$0 < x < \frac{1}{2\sqrt[3]{2}},\ 4\sqrt{2} < x$$

これを満たす最小の自然数 x は $\underline{\boldsymbol{x = 6}}$

②は

$$\log_3 x < 14 - x$$

$$\log_3 x < \log_3 3^{14-x}$$

$$\therefore 0 < x < 3^{14-x}$$

これを満たす最大の自然数 x は $\underline{\boldsymbol{x = 11}}$

第2問

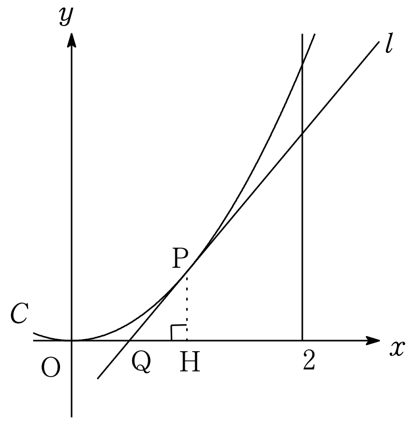
$C : y = x^2$

$y' = 2x$

$x = a$ における接線は

$y - a^2 = 2a(x - a)$

$\therefore\ l : \underline{\boldsymbol{y = 2ax - a^2}}$



l が x 軸と交わる点Qの座標は

$\underline{\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\frac{a}{2}},\ \mathbf{0}\right)}$

$$S = \int_0^a x^2 dx - \triangle \mathrm{PHQ}$$

$$= \left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_0^a - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a^2$$

$$= \underline{\boldsymbol{\frac{a^3}{12}}}$$

$$T = \int_a^2 \{x^2 - (2ax - a^2)\}dx = \int_a^2 (x-a)^2 dx = \left[\ \frac{(x-a)^3}{3}\ \right]_a^2$$

$$= \frac{(2-a)^3}{3} = \underline{\boldsymbol{-\frac{a^3}{3} + 2a^2 - 4a + \frac{8}{3}}}$$

$$U = S + T = \frac{a^3}{12} + \frac{(2-a)^3}{3} = -\frac{1}{4}a^3 + 2a^2 - 4a + \frac{8}{3}\quad (= f(a) \text{ とおく})$$

$$f'(a) = -\frac{1}{4}(3a-4)(a-4)$$

a	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$\frac{8}{3}$	$\searrow$	$\frac{8}{27}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$

U は

$\underline{\boldsymbol{a = 0}\ \textbf{で最大値}\ \boldsymbol{\frac{8}{3}}},$

$\underline{\boldsymbol{a = \frac{4}{3}}\ \textbf{で最小値}\ \boldsymbol{\frac{8}{27}}}$

をとる.

第3問

$x_1=1,\ x_2=2$ より

$$x_3=\frac{1}{4}x_1+\frac{3}{4}x_2=\underline{\mathbf{\frac{7}{4}}}$$

$$y_1=x_2-x_1=\underline{\mathbf{1}}$$

$$x_{n+1}-x_{n+2}=\frac{1}{4}(x_{n+1}-x_n)$$

$$\therefore\ \underline{\boldsymbol{y_{n+1}=\frac{-1}{4}y_n}}$$

したがって，$\{y_n\}$ は等比数列であるから

$$y_n=1\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}=\underline{\boldsymbol{\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}}}$$

$\boxed{\text{キ}}$ … $\underline{⓪}$

$x_{n+1}-x_n=\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ であるから

$$x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

$$=1+\frac{1\cdot\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}$$

$$=\underline{\boldsymbol{\frac{9}{5}-\frac{4}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}}}\quad(n=1\text{ でも成立})$$

$\boxed{\text{サ}}$ … $\underline{⓪}$

$r=\frac{1}{4}$ とおくと

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k\left|\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}\right|=\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1}$$

であり

$$\begin{array}{rl} S_n= & 1+2r+3r^2+4r^3+\cdots\cdots+nr^{n-1} \\ -)\ rS_n= & \quad\ \ r+2r^2+3r^3+\cdots\cdots+(n-1)r^{n-1}+nr^n \\ \hline S_n-rS_n= & 1+r+r^2+r^3+\cdots\cdots+r^{n-1}\qquad -nr^n \end{array}$$

$$(1-r)S_n=\underline{\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}-nr^n}}$$

$\boxed{\text{シ}}$ … $\underline{①}$ ，$\boxed{\text{ス}}$ … $\underline{①}$

$$=\frac{1-r^n}{1-r}-nr^n$$

$$\therefore\ S_n=\frac{1-r^n}{(1-r)^2}-\frac{nr^n}{1-r}$$

$$=\underline{\boldsymbol{\frac{16}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}}$$

$\boxed{\text{ツ}}$ … $\underline{①}$ ，$\boxed{\text{ナ}}$ … $\underline{⓪}$

第4問

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\underline{\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\underline{\boldsymbol{-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}}}$

点 N は平面 α 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=s\overrightarrow{\mathrm{AL}}+t\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ と表せるので

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s\overrightarrow{\mathrm{AL}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\vec{a}=s\left(-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)+t\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\underline{\boldsymbol{\left(1-\frac{2}{3}s-t\right)\vec{a}+\left(-\frac{s}{3}+\frac{t}{2}\right)\vec{b}+\frac{s}{3}\vec{c}}}$

一方，点 N は OC 上にもあるので

$$\begin{cases}1-\frac{2}{3}s-t=0\\ -\frac{s}{3}+\frac{t}{2}=0\end{cases}\qquad\qquad \therefore\ s=\frac{3}{4},\ t=\frac{1}{2}$$

これから，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\underline{\boldsymbol{\frac{1}{4}\vec{c}}}$

$\mathrm{AB}=2r$ より，$\left|\vec{b}-\vec{a}\right|=2r$

両辺 2 乗して，$\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{a}\right|^2=4r^2$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\underline{\boldsymbol{1-2r^2}}$

$\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$ より，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\underline{\boldsymbol{0}}$

$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=4+4r^2$ より，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\underline{\boldsymbol{-2r^2}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=0$ より，

$r=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \mathrm{AB}=2r=\underline{\boldsymbol{\sqrt{2}}}$

第 5 問

(1) 1 回戦のゲームの得点の仮平均を 30 とすると

$$\mathrm{A} = 30 + \frac{1}{15}\{3+14+0+8+(-1)+(-4)+13+(-7)+(-2)+4+3+(-4)+6+0+(-3)\}$$
$$= 30 + \frac{30}{15} = \underline{\mathbf{32.0}}$$

15 人の合計点について

$$10\mathrm{A}_1 + 5\mathrm{A}_2 = 15\mathrm{A} \qquad \therefore\ \underline{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{A_1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{A_2} = \mathbf{A}}$$

(2) 2 回戦の得点について表にすると次のようになる

番号	得点 u	$u-\overline{u}$	$(u-\overline{u})^2$
1	37	0	0
2	44	7	49
3	34	-3	9
4	35	-2	4
5	30	-7	49
7	41	4	16
10	38	1	1
11	33	-4	16
13	41	4	16
14	37	0	0
合計	370		160
平均	37		16(分散)

偏差の最大値は $\underline{\mathbf{7.0}}$

分散 $V = \underline{\mathbf{16.00}}$

標準偏差 $\sqrt{V} = \underline{\mathbf{4.0}}$

(3) 3 回戦の得点について表にすると次のようになる

番号	得点 v	$v-\overline{v}$	$(v-\overline{v})^2$
2	D$=43+x$	x	x^2
7	43	0	0
10	E$=43+y$	y	y^2
13	F$=43+z$	z	z^2
合計	43.0×4		6.50×4
平均	43.0		6.50

合計点より

$(43+x)+43+(43+y)+(43+z)=43.0\times4$

$\therefore\ x+y+z=\underline{\mathbf{0}}$

最大値は D，最小値は F で範囲が 7 であるから

$x-z=\underline{\mathbf{7}}$

表の 3 列目の合計より

$x^2+y^2+z^2=6.50\times4=\underline{\mathbf{26}}$

これらと，$z<y<0<x$ より，$x=4$，$y=-1$，$z=-3$

$\therefore\underline{\mathbf{D=47,\ E=42,\ F=40}}$

(4) $(p,\ q)=(44,\ 44)$，$(33,\ 33)$ がともにあるのは $\underline{②}$のみ

相関図が右上がりなので，p と q の間には正の相関がある　　$\therefore$ $\underline{⓪}$

(5) 10 人について，$r=\dfrac{q-p}{p}\times100$ の値が

$0\leqq r<10$ となるのは，番号 2，5，11 の 3 人　$\therefore$ $\underline{\mathbf{G=3}}$

$10\leqq r<20$ となるのは，番号 1，3，10，13 の 4 人　$\therefore$ $\underline{\mathbf{H=4}}$