2011年度　数学I・数学A　解答

第1問

[1]

$a=3+2\sqrt{2}$, $b=2+\sqrt{3}$

$\dfrac{1}{a}$ と $\dfrac{1}{b}$ の分母を有理化して，$\dfrac{1}{a}=\underline{\mathbf{3-2\sqrt{2}}}$，$\dfrac{1}{b}=\underline{\mathbf{2-\sqrt{3}}}$

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}-\frac{b}{a}&=(3+2\sqrt{2})(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})(3-2\sqrt{2})\\&=(6-3\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2\sqrt{6})-(6-4\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2\sqrt{6})\\&=\underline{\mathbf{8\sqrt{2}-6\sqrt{3}}}\end{aligned}$$

また，$|2abx-a^2|<b^2$ を満たす x の範囲は

$$-b^2<2abx-a^2<b^2$$

$$\frac{a^2-b^2}{2ab}<x<\frac{a^2+b^2}{2ab}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)<x<\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

$$\therefore\ \underline{\mathbf{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}<x<6-2\sqrt{6}}}$$

[2]

$p:(a+b)^2+(a-2b)^2<5$　　　$\overline{p}:(a+b)^2+(a-2b)^2\geqq 5$

$q:|a+b|<1$ または $|a-2b|<2$　　　$\overline{q}:|a+b|\geqq 1$ かつ $|a-2b|\geqq 2$

(1) $a=1$，$b=1$ のとき，

$|a-2b|=1<2$ となり q は成立するが，$(a+b)^2+(a-2b)^2=5$ となり p は不成立　<u>③</u>

(2) 命題「$p\Longrightarrow q$」の対偶は「$\overline{q}\Longrightarrow\overline{p}$」　<u>④,⑦</u>

(3) (1) より,「$q\Longrightarrow p$」は偽

$|a+b|\geqq 1$ かつ $|a-2b|\geqq 2$ ならば，$(a+b)^2+(a-2b)^2\geqq 1^2+2^2=5$

よって,「$\overline{q}\Longrightarrow\overline{p}$」は真であるから,「$p\Longrightarrow q$」も真

以上より，p は q であるための十分条件であるが，必要条件ではない　<u>②</u>

第 2 問

$$G : y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \cdots ①$$

$$G' : y = -3x^2 + 12bx = -3(x - 2b)^2 + 12b^2$$

2 つのグラフ G と G' の軸が一致するとき，$-\dfrac{b}{2a} = 2b$　　$\therefore a = \underline{\dfrac{\mathbf{-1}}{\mathbf{4}}}$

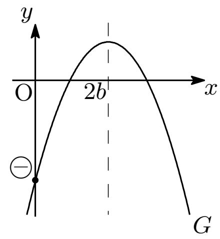
G が点 $(1,\ 2b-1)$ を通るとき，$2b - 1 = a + b + c$　　$\therefore c = b - \underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}}$

(1) $G : y = \dfrac{-1}{4}x^2 + bx + b - \dfrac{3}{4} = \dfrac{-1}{4}(x - 2b)^2 + b^2 + b - \dfrac{3}{4} \cdots ①'$

G と x 軸が異なる 2 点で交わるとき，(G の頂点の y 座標) > 0

$b^2 + b - \dfrac{3}{4} > 0$　　$\therefore \underline{\boldsymbol{b < \dfrac{-3}{2},\ \dfrac{1}{2} < b}}$

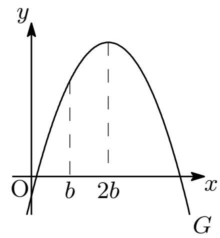
G と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるとき，



$$\begin{cases} (G\text{ の頂点の } y \text{ 座標}) > 0 \\ (G \text{ と } y \text{ 軸との交点の } y \text{ 座標}) < 0 \\ (G \text{ の軸}) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 + b - \dfrac{3}{4} > 0 \\ b - \dfrac{3}{4} < 0 \\ 2b > 0 \end{cases}$$

$\therefore \underline{\boldsymbol{\dfrac{1}{2} < b < \dfrac{3}{4}}}$

(2) $0 \leqq x \leqq b$ において，$x = 0$ で ①$'$ は最小値 $b - \dfrac{3}{4}$ をとる



条件より，$b - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{1}{4}$　　$\therefore b = \underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$

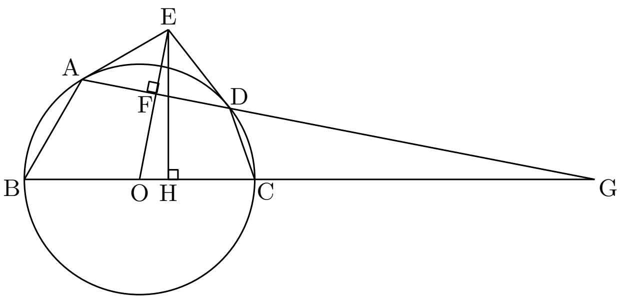
$x \geqq b$ において，$x = 2b$ で ①$'$ は最大値 $b^2 + b - \dfrac{3}{4}$ をとる

条件より，$b^2 + b - \dfrac{3}{4} = 3$　　$\therefore b = \underline{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}}$

G_1 の頂点 $(1,\ 0)$，G_2 の頂点 $(3,\ 3)$ であるから，

G_1 を x 軸方向に $\underline{\mathbf{2}}$，y 軸方向に $\underline{\mathbf{3}}$ だけ平行移動すると G_2 と一致する

第 3 問



(1) 三角形 ABC で余弦定理より

$$x^2=(\sqrt{7})^2+(2\sqrt{7})^2-2\cdot\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}\cdot\cos\theta=\underline{\mathbf{35}}-28\cos\theta\ \cdots\ ①$$

三角形 ACD で余弦定理より

$$x^2=(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos(180^\circ-\theta)=15+\underline{\mathbf{12}}\cos\theta\ \cdots\ ②$$

①，②を連立して，$\cos\theta=\underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$ $(\theta=60^\circ)$，$x=\underline{\boldsymbol{\sqrt{21}}}$

円 O の半径を R とすると，三角形 ABC で正弦定理より，$2R=\dfrac{\sqrt{21}}{\sin 60^\circ}$

$\therefore R=\underline{\boldsymbol{\sqrt{7}}}$　　(BC $=2\sqrt{7}=2R$ であるから，BC は円 O の直径)

四角形 ABCD の面積を S とすると，

$$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}\cdot\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sin 120^\circ=\underline{\boldsymbol{5\sqrt{3}}}$$

(2) 接線と接点を通る半径は直交するから，$\angle\mathrm{OAE}=\underline{\mathbf{90^\circ}}$

接点 A，D は直線 OE に関して対称であるから，$\angle\mathrm{AFE}=\underline{\mathbf{90^\circ}}$

$\triangle\mathrm{OAE}\backsim\triangle\mathrm{OFA}$ より，

$\mathrm{OE}:\mathrm{OA}=\mathrm{OA}:\mathrm{OF}$

$\therefore \mathrm{OF}\cdot\mathrm{OE}=\mathrm{OA}^2=R^2=(\sqrt{7})^2=\underline{\mathbf{7}}$

$\angle\mathrm{EFG}=\angle\mathrm{EHG}=90^\circ$ であるから，

2 点 F，H は EG を直径とする円周上の点である

よって，4 点 E，G，H，F $\underline{\mathbf{②}}$ は同一円周上にある

したがって，方べきの定理より，$\mathrm{OH}\cdot\mathrm{OG}=\mathrm{OF}\cdot\mathrm{OE}=\underline{\mathbf{7}}$

第 4 問

1 個のさいころを 1 回投げるとき

A : 4 以下の目が出る，B : 5 以上の目が出る

とすると，$p = P(A) = \underline{\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}}$，$q = P(B) = \underline{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}}$

(1) 1 個のさいころを 8 回投げるとき

A が 3 回起こる確率は，${}_8\mathrm{C}_3 p^3q^5 = \underline{\mathbf{56}}\,p^3q^5$

第 1 回目に A が起こり，残りの 7 回で A が 2 回起こる確率は，$p \cdot {}_7\mathrm{C}_2 p^2q^5 = \underline{\mathbf{21}}\,p^3q^5$

第 1 回目に B が起こり，残りの 7 回で A が 3 回起こる確率は，$q \cdot {}_7\mathrm{C}_3 p^3q^4 = \underline{\mathbf{35}}\,p^3q^5$

(2) 一般に ${}_n\mathrm{C}_k = {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_k$，${}_n\mathrm{C}_k = {}_n\mathrm{C}_{n-k}$ が成り立つから

${}_8\mathrm{C}_3 = {}_7\mathrm{C}_2 + {}_7\mathrm{C}_3 = {}_7\mathrm{C}_5 + {}_7\mathrm{C}_4$　　**②,⑥**

得点が k 点となるのは，第 $k-1$ 回目までに A が起こらず，

第 k 回目に A が起こり，残りの $8-k$ 回で A が 2 回起こる　$(2 \leqq k \leqq 6)$

その確率は，$q^{k-1} \cdot p \cdot {}_{8-k}\mathrm{C}_2 p^2 q^{6-k} = {}_{8-k}\mathrm{C}_2 p^3q^5$　　(これは $k=1$ でも成立)

得点	0	1	2	3	4	5	6
確率	/	$21p^3q^5$	$15p^3q^5$	$\underline{\mathbf{10}}\,p^3q^5$	$6p^3q^5$	$3p^3q^5$	$\underline{\boldsymbol{p^3q^5}}$

得点の期待値は，$(1\cdot 21 + 2\cdot 15 + 3\cdot 10 + 4\cdot 6 + 5\cdot 3 + 6\cdot 1)p^3q^5 = \underline{\dfrac{\mathbf{112}}{\mathbf{729}}}$