2019 年度　センター試験　数学ⅡB（本試験）　ワンポイント解説

第1問

〔1〕

(1)　$f(0)=-1$，$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2+\sqrt{3}$　答

(2)　$\cos^2\theta=\dfrac{\cos 2\theta+1}{2}$　答

$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$，　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$　であるから

$$f(\theta)=3\cdot\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)+4\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta-\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)$$

$$=2\sin 2\theta-2\cos 2\theta+1\quad\cdots\cdots①$$　答

三角関数の合成を用いると ① は　$f(\theta)=2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+1$　答

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{4}\leqq 2\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ であるから

$$-1\leqq\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1\qquad\therefore\ 1-2\sqrt{2}\leqq f(\theta)\leqq 1+2\sqrt{2}$$

$3<1+2\sqrt{2}<4$ であるから　$m=3$　答

$f(\theta)=3$ となるとき　$2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+1=3$　$\therefore\ \sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

これを満たすのは　$2\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$　$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{2}$　答

〔2〕

② の真数の条件より　$x+2>0$，$y+3>0$　$\therefore\ x>-2$，$y>-3$（②）答

底の変換公式より　$\log_4(y+3)=\dfrac{\log_2(y+3)}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2(y+3)}{2}$　答

よって ② から　$\log_2(x+2)-2\cdot\dfrac{\log_2(y+3)}{2}=-1$

$$\log_2 2(x+2)=\log_2(y+3)$$

$$2(x+2)=y+3\qquad\therefore\ y=2x+1\quad\cdots\cdots④$$　答

③，④ より　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+1}-11\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0$　$\therefore\ \dfrac{1}{3}\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}^2-\dfrac{11}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+6=0$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=t$ とおくと　$\dfrac{1}{3}t^2-\dfrac{11}{3}t+6=0$　$\therefore\ t^2-11t+18=0$　……⑤　答

$x>-2$，$y>-3$ であるから　$0<\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$　$\therefore\ 0<t<9$　答

⑤ より　$(t-2)(t-9)=0$

⑥ より　$t=2$　答

$t=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=3^{-x}$ であるから，$t=2$ のとき

$$3^{-x}=2\qquad x=\log_3\frac{1}{2}$$　答

④ より　$y=2\cdot\log_3\dfrac{1}{2}+1=\log_3\dfrac{3}{4}$　答

第2問

$f(x)=x^3+px^2+qx$ より　　$f'(x)=3x^2+2px+q$

(1)　$f(x)$ が $x=-1$ で極値をとるので　　$f'(-1)=0$　答

よって　　$3-2p+q=0$

また，$f(-1)=2$ であるから　　$-1+p-q=2$　　$\therefore\ p-q=3$

これを解くと　　$p=0$，$q=-3$　答

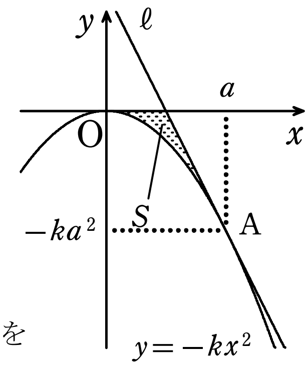
したがって　　$f(x)=x^3-3x$

$f(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x=-f(x)$ より，曲線 C は原点に関して対称であるから，$x=1$ で極小値 -2 をとる．　答

(2)　$y=-kx^2$ より　　$y'=-2kx$

A $(a,\ -ka^2)$ における接線の方程式は　　$y+ka^2=-2ka(x-a)$

$\therefore\ y=-2ka(x-a)-ka^2=-2kax+ka^2$　…①　答



$y=0$ とすると　　$-2kax+ka^2=0$

$k>0$，$a>0$ であるから　　$x=\dfrac{ka^2}{2ka}=\dfrac{a}{2}$　答

D と x 軸および直線 $x=a$ で囲まれた図形の面積は

$$\int_0^a -(-kx^2)dx=\int_0^a kx^2dx=\frac{k}{3}\Big[x^3\Big]_0^a=\frac{k}{3}a^3$$　答

この面積から，ℓ，x 軸，$x=a$ で囲まれた三角形の面積を引いたものが S であるから　　$S=\dfrac{k}{3}a^3-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot ka^2=\dfrac{k}{12}a^3$　答

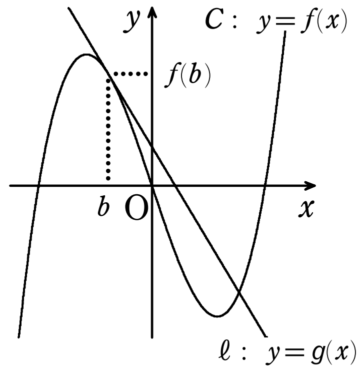
(3)　Aが C 上にあるとき　　$-ka^2=a^3-3a$

$a>0$ より　　$k=\dfrac{3}{a}-a$　答

$f'(b)=3b^2-3$ であるから，ℓ の方程式は b を用いて

$y-(b^3-3b)=(3b^2-3)(x-b)$　　$\therefore\ y=3(b^2-1)x-2b^3$　……②　答

と表せる．② の右辺を $g(x)$ とおくと，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は $x=b$ で接することに注目して



$f(x)-g(x)=(x-b)^2(x+2b)$

と因数分解され，$a=-2b$ となる．

①，② の傾きを比較すると　　$-2ka=3(b^2-1)$

$k=\dfrac{3}{a}-a$，$b=-\dfrac{1}{2}a$ を代入すると

$$-2a\left(\frac{3}{a}-a\right)=3\left(\frac{a^2}{4}-1\right)$$

$$-6+2a^2=\frac{3}{4}a^2-3\qquad\therefore\ a^2=\frac{12}{5}$$　答

したがって　　$S=\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{3}{a}-a\right)a^3=\dfrac{1}{12}a^2(3-a^2)$

$$=\frac{1}{12}\cdot\frac{12}{5}\cdot\left(3-\frac{12}{5}\right)=\frac{3}{25}$$　答

第3問

(1)　$S_2=3+3\times4=15$，$T_2=T_1+S_1=-1+3=2$　答

(2)　$\{S_n\}$ は初項 3，公比 4 の等比数列の初項から第 n 項までの和であるから，

$$S_n=\frac{3(4^n-1)}{4-1}=4^n-1$$（オ：⓪）　答

数列 $\{T_n\}$ の階差数列が数列 $\{S_n\}$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$$T_n=T_1+\sum_{k=1}^{n-1}S_k=-1+\sum_{k=1}^{n-1}(4^k-1)$$

$$=-1+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}-(n-1)=\frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3}$$（ク：⓪）……①

これは $n=1$ のときも成り立つ．　答

(3)　$b_1=\dfrac{a_1+2T_1}{1}=\dfrac{-3+2\cdot(-1)}{1}=-5$　答

数列 $\{T_n\}$ の階差数列が数列 $\{S_n\}$ であることから

$$T_{n+1}-T_n=S_n \qquad \therefore\ T_{n+1}=T_n+S_n=T_n+4^n-1$$

① より　$4^n=3T_n+3n+4$

これを代入すると　$T_{n+1}=T_n+3T_n+3n+4-1=4T_n+3n+3$　答

よって　$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}+2T_{n+1}}{n+1}=\dfrac{\dfrac{4(n+1)}{n}a_n+\dfrac{8}{n}T_n+2(4T_n+3n+3)}{n+1}$

$$=4\cdot\frac{a_n+2T_n}{n}+6$$

$\therefore\ b_{n+1}=4b_n+6$　答

これを変形すると　$b_{n+1}+2=4(b_n+2)$

数列 $\{b_n+2\}$ は，初項 $b_1+2=-5+2=-3$，公比 4 の等比数列であるから

$$b_n+2=-3\cdot4^{n-1} \qquad \therefore\ b_n=-3\cdot4^{n-1}-2$$（ナ：⓪）答

したがって $b_n=\dfrac{a_n+2T_n}{n}$ より

$$a_n=nb_n-2T_n=\frac{-(9n+8)\cdot4^{n-1}+8}{3}$$　答

第4問

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ かつ $\vec{a}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{c}\neq\vec{0}$ より　$\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$　答

よって，$\triangle\mathrm{OAC}$ の面積は　$\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{c}|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　答

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2=-1$　答

$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2$　$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=\sqrt{2}$　答

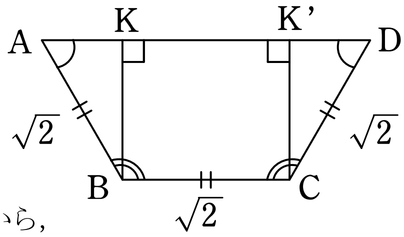
$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2=2$　$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{2}$　答

よって　$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$

$0<\angle\mathrm{ABC}<180^\circ$ より　$\angle\mathrm{ABC}=120^\circ$　答

四角形 ABCD は AB＝CD の等脚台形であるから，

$\angle BAD = \angle ADC = 60^\circ$ 答



B，C から AD へ垂線の BK，CK' を下すと

$AK = DK' = BA\cos 60^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

よって $AD = AK + KK' + K'D = 2\sqrt{2}$ となるから，

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$ 答

このとき　$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$ 答

また，$BK = AB\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ であるから，四角形 ABCD の面積は

$\dfrac{1}{2} \times (\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 答

(3)　$\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{c}$ より　$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OB} = s\vec{a} - \vec{b} + t\vec{c}$

$\overrightarrow{BH} \cdot \vec{a} = (s\vec{a} - \vec{b} + t\vec{c}) \cdot \vec{a} = s - 1$

$\overrightarrow{BH} \perp \vec{a}$ より $\overrightarrow{BH} \cdot \vec{a} = 0$ であるから　$s = 1$ 答

$\overrightarrow{BH} \cdot \vec{c} = (s\vec{a} - \vec{b} + t\vec{c}) \cdot \vec{c} = -3 + 5t$

$\overrightarrow{BH} \perp \vec{c}$ より $\overrightarrow{BH} \cdot \vec{c} = 0$ であるから　$t = \dfrac{3}{5}$ 答

よって　$\overrightarrow{BH} = \vec{a} - \vec{b} + \dfrac{3}{5}\vec{c} = \dfrac{1}{5}(5\vec{a} - 5\vec{b} + 3\vec{c})$

したがって　$|\overrightarrow{BH}|^2 = \dfrac{1}{25}(25|\vec{a}|^2 + 25|\vec{b}|^2 + 9|\vec{c}|^2 - 50\vec{a} \cdot \vec{b} - 30\vec{b} \cdot \vec{c} + 30\vec{a} \cdot \vec{c}) = \dfrac{1}{5}$

$\therefore\ |\overrightarrow{BH}| = \sqrt{\dfrac{1}{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 答

$\triangle OAC$ を底面と考えると (1) より　$V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{5}}{2} \times \dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{1}{6}$ 答

(4)　四角錐 OABCD を，三角錐 BOAC と四角錐 OACD に分割する．

それぞれ底面を $\triangle ABC$，$\triangle ACD$ と考えると，高さは共通である．

したがって，これらの体積比は底面積の比に等しい．

BC∥AD であるから

$\triangle ABC : \triangle ACD = BC : DA = 1 : 2$

三角錐 BOAC の体積が V であるから，四角錐 OABCD の体積は

$V + 2V = 3V$ 答

四角錐 OABCD において，四角形 ABCD を底面としたときの高さを h

とすると，体積について　$3V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \times h$　$\therefore\ h = 2\sqrt{3}V$

(3) の V を用いると　$h = 2\sqrt{3} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 答