2019年度　センター試験　数学ＩＡ（本試験）　ワンポイント解説

第1問

〔1〕

$9a^2-6a+1=(\mathbf{3}\,a-\mathbf{1})^2$ $\boxed{\text{答}}$

$A=\sqrt{9a^2-6a+1}+|a+2|$

$\quad=\sqrt{(3a-1)^2}+|a+2|$

$\quad=|3a-1|+|a+2|$

（ｉ）$a>\dfrac{1}{3}$のとき，$A=(3a-1)+(a+2)=\mathbf{4}\,a+\mathbf{1}$ $\boxed{\text{答}}$

（ⅱ）$-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$のとき，$A=-(3a-1)+(a+2)=-\mathbf{2}\,a+\mathbf{3}$ $\boxed{\text{答}}$

（ⅲ）$a<-2$のとき，$A=-(3a-1)-(a+2)=-4a-1$

$A=2a+13$ となるaの値は

（ｉ）のとき，$4a+1=2a+13$　→　$a=6$（$a>\dfrac{1}{3}$を満たす）

（ⅱ）のとき，$-2a+3=2a+13$　→　$a=-\dfrac{5}{2}$（$-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$を満たさない）

（ⅲ）のとき，$-4a-1=2a+13$　→　$a=-\dfrac{7}{3}$（$a<-2$を満たす）

（ｉ）～（ⅲ）より，$a=\mathbf{6}$，$\dfrac{\mathbf{-7}}{\mathbf{3}}$ $\boxed{\text{答}}$

〔2〕

(1)

m，nが条件$\overline{p}$（m，nのうち少なくとも一方は偶数）を満たすとき，

mが奇数ならばnは偶数である。0 $\boxed{\text{答}}$

また，mが偶数ならばnは偶数でも奇数でもよい。2 $\boxed{\text{答}}$

(2)

$\overline{p}:\begin{cases}m\text{が奇数}\\ n\text{が偶数}\end{cases}\text{or}\begin{cases}m\text{が偶数}\\ n\text{が奇数}\end{cases}\text{or}\begin{cases}m\text{が偶数}\\ n\text{が偶数}\end{cases}$　　$r:\begin{cases}m\text{が奇数}\\ n\text{が奇数}\end{cases}\text{or}\begin{cases}m\text{が偶数}\\ n\text{が偶数}\end{cases}$

$p\Leftrightarrow q$ より，pはqであるための必要十分条件である。0 $\boxed{\text{答}}$

$p\Rightarrow r$ より，pはrであるための十分条件であるが，必要条件ではない。2 $\boxed{\text{答}}$

$\overline{p}$はrであるための必要条件でも十分条件でもない。3 $\boxed{\text{答}}$

〔3〕

(1)

$y=x^2+(2a-b)x+a^2+1$

$\quad=\left(x+\dfrac{2a-b}{2}\right)^2-\dfrac{b^2}{4}+ab+1$　より，頂点の座標は$\left(\dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{2}}-\mathbf{a}\,,\,-\dfrac{\mathbf{b}^2}{\mathbf{4}}+\mathbf{ab}+\mathbf{1}\right)$ $\boxed{\text{答}}$

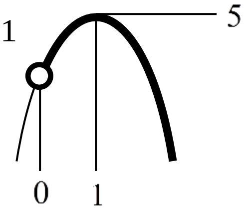
(2)

点$(-1\,,\,6)$を$y=x^2+(2a-b)x+a^2+1$に代入して，

$6=(-1)^2+(2a-b)(-1)+a^2+1$

$b=-a^2+2a+4$

$\quad=-(a-1)^2+5$



よってbの最大値は$\mathbf{5}$ $\boxed{\text{答}}$

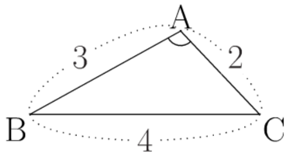
そのときのaの値は$\mathbf{1}$ $\boxed{\text{答}}$

$b=5$，$a=1$のときグラフGは，

$y=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$となるので，これは$y=x^2$のグラフを

x軸方向に$\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ $\boxed{\text{答}}$，y軸方向に$\dfrac{\mathbf{-1}}{\mathbf{4}}$ $\boxed{\text{答}}$ だけ平行移動したものである。

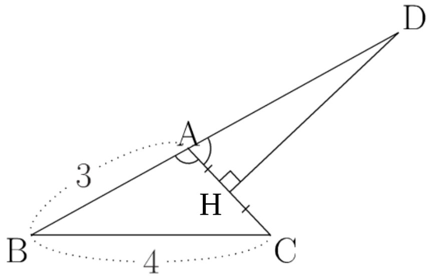
第2問	〔1〕	



$\cos\angle \mathrm{BAC}=\dfrac{3^2+2^2-4^2}{2\cdot 3\cdot 2}=\mathbf{\dfrac{-1}{4}}$ $\boxed{\text{答}}$

よって $\angle\mathrm{BAC}$ は鈍角。 ② $\boxed{\text{答}}$

また，$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{15}}{4}}$ $\boxed{\text{答}}$



$\angle\mathrm{BAC}$ は鈍角であることより，
点 D は左の図ような位置にくる。

$$\cos\angle\mathrm{CAD}=\cos(180^\circ-\angle\mathrm{BAC})$$
$$=-\cos\angle\mathrm{BAC}$$
$$=\mathbf{\frac{1}{4}}\ \boxed{\text{答}}$$

$$\cos\angle\mathrm{CAD}=\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AD}}$$

$$\therefore\ \ \mathrm{AD}=\frac{\mathrm{AH}}{\cos\angle\mathrm{CAD}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=\ \mathbf{4}\ \boxed{\text{答}}$$

$\triangle$DBCの面積 ＝ $\triangle$ABCの面積 ＋ $\triangle$ACDの面積

$$=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\angle\mathrm{BAC}+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\cdot\sin\angle\mathrm{CAD}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\mathbf{\frac{7\sqrt{15}}{4}}\ \boxed{\text{答}}$$

〔2〕

(1)

・2013 年の箱ひげ図から最大値が 135～140 であることがわかり，
これに対応するヒストグラムは ③ $\boxed{\text{答}}$

・2017 年の箱ひげ図から最大値が 120～125 であることがわかり，
これに対応するヒストグラムは ④ $\boxed{\text{答}}$

(2)

モンシロチョウの初見日の四分位範囲は箱ひげ図より約 20 日なので，④は正しくない。
また，モンシロチョウ，ツバメの初見日を x 日，y 日とすると，差が 15 以下ならば

$|x-y|\leqq 15$ $\therefore$ $x-15\leqq y\leqq x+15$ を満たす。

図より，$y>x+15$ にデータが存在するから⑦は正しくない。以上より，④，⑦ $\boxed{\text{答}}$

(3)

・偏差の平均値は0なので，X の偏差の平均値は ⓪ $\boxed{\text{答}}$

・X' の平均値は，X の偏差の平均値を標準偏差 s で割ったものなので ⓪ $\boxed{\text{答}}$

・X' の標準偏差＝$\sqrt{\dfrac{(x_1'-\overline{X'})^2+(x_2'-\overline{X'})^2+\cdots+(x_n'-\overline{X'})^2}{n}}$

$$=\sqrt{\frac{\left(\frac{x_1-\overline{x}}{s}\right)^2+\left(\frac{x_2-\overline{x}}{s}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_n-\overline{x}}{s}\right)^2}{n}}=\frac{s}{s}=1\quad ①\ \boxed{\text{答}}$$

M' と T' の散布図は，
すべてのデータを同様に変換しているため M と T の散布図と点の配置が同じであること，
また，標準偏差はすべてのデータの偏差の平均であり，それが1であることから，
M' と T' の散布図は ② $\boxed{\text{答}}$

第3問	(1)	1回目に赤い袋から赤球が取り出される確率は，$\frac{4}{6}\times\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{4}{9}}$ 答 1回目に白い袋から赤球が取り出される確率は，$\frac{2}{6}\times\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{6}}$ 答
	(2)	2回目の操作が赤い袋で行われる確率は，$\frac{4}{9}+\frac{1}{6}=\frac{11}{18}$ よって，2回目の操作が白い袋で行われる確率は，$1-\frac{11}{18}=\mathbf{\frac{7}{18}}$ 答
	(3)	1回目の操作で白球を取り出す確率が p のとき， 2回目の操作で白球が取り出されるのは，以下の2パターン。 （ｉ）1回目の操作で白球が取り出され，2回目の操作で白球が取り出される。 ⇒ $p\times\frac{1}{2}$ （ⅱ）1回目の操作で赤球が取り出され，2回目の操作で白球が取り出される。 ⇒ $(1-p)\times\frac{1}{3}$ よって，（ｉ）＋（ⅱ）＝ $p\times\frac{1}{2}+(1-p)\times\frac{1}{3}$ $=\mathbf{\frac{1}{6}}p+\frac{1}{3}$ 答 2回目の操作で白球が取り出されるのは，$p=\frac{7}{18}$ を代入して，$\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{18}+\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{43}{108}}$ 答 同様にして3回目は，$\frac{1}{6}\cdot\frac{43}{108}+\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{259}{648}}$ 答
	(4)	$\begin{cases}\text{2回目の操作で取り出した球が白球である事象を}A\\ \text{2回目の操作が白い袋である事象を}B\end{cases}$ とすると，求める条件付き確率は， $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{7}{18}\times\frac{1}{2}}{\frac{43}{108}}=\mathbf{\frac{21}{43}}$ 答 $\begin{cases}\text{3回目の操作で取り出した球が白球である事象を}C\\ \text{1回目と2回目の操作で取り出した球がともに赤球である事象を}D\end{cases}$ とすると，求める条件付き確率は， $P_C(D)=\frac{P(C\cap D)}{P(C)}=\frac{\frac{11}{18}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}{\frac{259}{648}}=\mathbf{\frac{88}{259}}$ 答
第4問	(1)	$49x-23y=1\cdots$① ユークリッドの互除法より， $\begin{cases}49=23\times2+3\\ 23=3\times7+2\\ 3=2\times1+1\end{cases}$ よって， $49\cdot8-23\cdot17=1\cdots$② ①－②より $49(x-8)-23(y-17)=0$ 49と23は互いに素なので k を整数として， $\begin{cases}x-8=23k\\ y-17=49k\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}x=23k+8\\ y=49k+17\end{cases}$ 自然数 x が最小なのは $k=0$ のときで， $x=\mathbf{8}$ 答 $y=\mathbf{17}$ 答 すべての整数解は， $x=\mathbf{23}\,k+8$ 答 ，$y=\mathbf{49}\,k+17$ 答

第5問

(2)

x，y を整数として，$A=49x$，$B=23y$ とおくと，$\left|49x-23y\right|=1$

（ⅰ）$49x-23y=1$ 　or　（ⅱ）$49x-23y=-1$

（ⅰ）のとき，(1)より A が最小なのは $x=8$

（ⅱ）のとき，(1)を利用して，$\begin{cases} x=23k-8 \\ y=49k-17 \end{cases}$ となり，A が最小なのは $x=15$

（ⅰ），（ⅱ）より，$(A,\ B)=(49\times\mathbf{8},\ 23\times\mathbf{17})$ $\boxed{\text{答}}$

また，$\left|49x-23y\right|=2$ について　（ⅲ）$49x-23y=2$ 　or　（ⅳ）$49x-23y=-2$

（ⅲ）のとき，(1)を利用して，$\begin{cases} x=23k+16 \\ y=49k+34 \end{cases}$ となり，A が最小なのは $x=16$

（ⅳ）のとき，(1)を利用して，$\begin{cases} x=23k-16 \\ y=49k-34 \end{cases}$ となり，A が最小なのは $x=7$

（ⅲ），（ⅳ）より，$(A,\ B)=(49\times\mathbf{7},\ 23\times\mathbf{15})$ $\boxed{\text{答}}$

(3)

一般に m と n の公約数は $m-n$ の約数。

a と $a+2$ は差が 2 なので，最大公約数は，1 または $\mathbf{2}$ $\boxed{\text{答}}$　　$a(a+1)(a+2)$ について，

連続する 2 数なので 2 の倍数，連続する 3 数なので 3 の倍数。よって，$\mathbf{6}$ の倍数。$\boxed{\text{答}}$

(4)

$6762=2\times\mathbf{3}\times 7^{\mathbf{2}}\times\mathbf{23}$ $\boxed{\text{答}}$

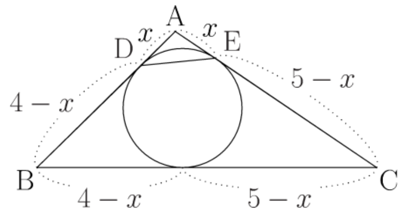
b，$b+1$，$b+2$ のいずれかは 7^2 の倍数であり，b，$b+1$，$b+2$ のいずれかは 23 の倍数であることから，(2)を利用できる。

(ア) $\left|A-B\right|=1$ のとき A が最小なのは，$A-B=1$ のときで，この場合 $B=b+1=23\times17$

(イ) $\left|A-B\right|=2$ のとき A が最小なのは，$A-B=-2$ のときで，この場合 $A=b=49\times7$

(ア)のとき $b=390$，(イ)のとき $b=343$ なので，b が最小の自然数となるのは，$b=\mathbf{343}$ $\boxed{\text{答}}$

内接円の半径 r は　$S=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot5\cdot\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{2}(4+7+5)r$　　$\therefore\ r=\dfrac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{2}}$ $\boxed{\text{答}}$



$\mathrm{AD}=x$ とおくと，左の図のようになり，

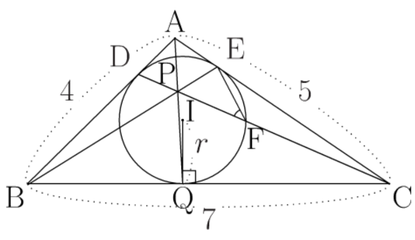
$\mathrm{BC}=(4-x)+(5-x)=7$

$\therefore\ x=\mathrm{AD}=\mathbf{1}$ $\boxed{\text{答}}$

$\triangle\mathrm{ADE}$ について余弦定理より，

$\mathrm{DE}^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)$

$\therefore\ \mathrm{DE}=\dfrac{\mathbf{2\sqrt{15}}}{\mathbf{5}}$ $\boxed{\text{答}}$



チェバの定理より，$\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{CQ}}\times\dfrac{\mathrm{DA}}{\mathrm{BD}}\times\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{AE}}=1$

$\therefore\ \dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{CQ}}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ $\boxed{\text{答}}$　　$\mathrm{BQ}=z$ とおくと，

$\dfrac{z}{7-z}=\dfrac{3}{4}$ より，$z=\mathrm{BQ}=\mathbf{3}$ $\boxed{\text{答}}$

よって，内接円と BC の接点が Q と一致する。$\therefore\ \mathrm{IQ}=r=\dfrac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{2}}$ $\boxed{\text{答}}$

$\triangle\mathrm{DEF}$ で正弦定理より，$\dfrac{\mathrm{DE}}{\sin\angle\mathrm{DFE}}=2\cdot r$

よって，$\sin\angle\mathrm{DFE}=\dfrac{2}{\sqrt{10}}$　　$\therefore\ \cos\angle\mathrm{DFE}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{15}}}{\mathbf{5}}$ $\boxed{\text{答}}$