2018 年度　センター試験 数学ⅡＢ（本試験） ワンポイント解説

第１問　〔1〕

(1)　半径が 1，弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさを表す（**②**）．答

(2)　$144° = \frac{144}{180}\pi = \mathbf{\frac{4}{5}\pi}$　答，　$\frac{23}{12}\pi = \frac{23}{12} \times 180° = \mathbf{345°}$　答

(3)　① において $x = \theta + \frac{\pi}{5}$ とすると，

$$2\sin x - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \quad \text{答}$$

加法定理を用いて変形すると，

$$2\sin x - 2\left(\cos x \cos\frac{\pi}{6} + \sin x \sin\frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1 \quad \text{答}$$

三角関数の合成により，

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \qquad \therefore\ \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \cdots※ \quad \text{答}$$

$\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ より $\frac{7}{10}\pi \leqq x \leqq \frac{6}{5}\pi$　∴ $\frac{11}{30}\pi \leqq x - \frac{\pi}{3} \leqq \frac{13}{15}\pi$

したがって，※ を満たすのは，

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi \qquad x = \theta + \frac{\pi}{5} = \frac{7}{6}\pi \qquad \therefore\ \theta = \mathbf{\frac{29}{30}\pi} \quad \text{答}$$

〔2〕

3 を底とする ② 式の両辺の対数をとると，

$$(\log_3 x)^2 \geqq 3(\log_3 x - \log_3 c)$$

$$\therefore\ t^2 - 3t + 3\log_3 c \geqq 0 \quad \cdots③ \quad \text{答}$$

$c = \sqrt[3]{9} = 3^{\frac{2}{3}}$ より $\log_3 c = \frac{2}{3}$ であるから，

$$t^2 - 3t + 2 \geqq 0$$

$$(t-1)(t-2) \geqq 0 \qquad \therefore\ t \leqq \mathbf{1},\quad t \geqq \mathbf{2} \quad \text{答}$$

真数の条件より $x > 0$ であるから，　$\mathbf{0} < x \leqq \mathbf{3}$，　$x \geqq \mathbf{9}$　答

$x > 0$ のとき，$t = \log_3 x$ の範囲は**実数全体**（**②**）である．

③ より，　$\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3\log_3 c \geqq 0$

$\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 \geqq 0$ であるから，任意の実数 t に対して ③ が常に成り立つ

ための必要十分条件は，

$$-\frac{9}{4} + 3\log_3 c \geqq 0 \qquad \therefore\ \log_3 c \geqq \mathbf{\frac{3}{4}} \quad \text{答}$$

すなわち，　$c \geqq 3^{\frac{3}{4}} = \mathbf{\sqrt[4]{27}}$　答

第2問

(1) 放物線 C 上の点 A における接線 ℓ の傾きは 2 である． 答

また， $y'=2px+q$ であるから， $x=1$ のとき，

$$2p+q=2 \qquad \therefore\ q=-2p+2$$ 答

また， C は点 A を通るから，

$$1=p+q+r$$

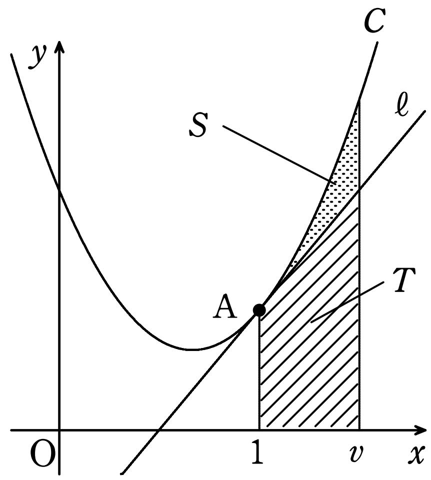
$$r=1-p-q=1-p-(-2p+2)=p-1$$ 答

(2) $1 \leqq x \leqq v$ において $px^2+qx+r \geqq 2x-1$ であるから，

$$S=\int_1^v \{(px^2+qx+r)-(2x-1)\}dx$$

$$=p\int_1^v (x-1)^2dx=\left[\frac{p}{3}(x-1)^3\right]_1^v$$

$$=\frac{p}{3}(v-1)^3=\frac{p}{3}(v^3-3v^2+3v-1)$$ 答



また， T は上底 1，下底 $2v-1$，高さ $v-1$ の台形の面積を表すから，

$$T=\frac{1}{2}\{1+(2v-1)\}(v-1)=v^2-v$$ 答

$U=S-T=\dfrac{p}{3}(v^3-3v^2+3v-1)-(v^2-v)=g(v)$ とおくと，

$$g'(v)=\frac{p}{3}(3v^2-6v+3)-(2v-1)$$

$v=2$ で極値をとるから，

$$g'(2)=p-3=0 \qquad \therefore\ p=3$$ 答

このとき $U=0$ となるのは，

$$v^3-3v^2+3v-1=v^2-v$$

$$(v-1)(v^2-3v+1)=0 \qquad \therefore\ v=1,\ \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$v_0>1$ であるから， $v_0=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ 答

また，$1<v<v_0$ において U は負の値のみをとる（③）． 答

さらに， $p=3$ のとき，

$$g'(v)=3v^2-8v+4=(3v-2)(v-2)$$

よって， $U=g(v)$ は $1<v<2$ において減少， $2<v$ において増加するから， $v=2$ において最小値 $g(2)=-1$ をとる． 答

〔2〕

一般に，$F'(x)=f(x)$（⑦）である．

また，$1\leqq x\leqq t$ において $f(x)\leqq 0$ であるから，

$$W=\int_1^t -f(x)\,dx=\Big[-F(x)\Big]_1^t=-F(t)+F(1)\text{（④）}\quad \text{答}$$

W の高さは $\sqrt{(t^2+1)^2-(t^2-1)^2}=\sqrt{4t^2}=2t$（$\because\ t>1$）であるから，

$$W=\frac{1}{2}\cdot(2t^2-2)\cdot 2t=2t^3-2t$$

よって，$-F(t)+F(1)=2t^3-2t$ であるから，両辺を t で微分すると，

$$-f(t)=6t^2-2 \qquad \therefore\ f(t)=-6t^2+2 \quad \text{答}$$

第3問 〔1〕

(1)　等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると，$a_n=a+d(n-1)$

$a_4=30$，$S_8=288$ より，

$$\begin{cases} a+3d=30 \\ 2a+7d=72 \end{cases}$$

これを解くと，　$a=-6$ 答，$d=12$ 答

また，$S_n=\dfrac{1}{2}\{-6-6+12(n-1)\}\times n=6n^2-12n$ 答

(2)　等差数列 $\{b_n\}$ の初項を b，公差を r とすると，$b_n=b\cdot r^{n-1}$

$b_2=36$，$T_3=156$ より，

$$\begin{cases} br=36 \\ b(1+r+r^2)=156 \end{cases}$$

これを解くと，　$b=12$ 答，$r=3$ 答

また，$T_n=\dfrac{12(3^n-1)}{3-1}=6(3^n-1)$ 答

(3)

$$c_n=n(a_1-b_1)+(n-1)(a_2-b_2)+\cdots+2\cdot(a_{n-1}-b_{n-1})+(a_n-b_n)$$

$$c_{n+1}=(n+1)(a_1-b_1)+n(a_2-b_2)+\cdots+2\cdot(a_n-b_n)+(a_{n+1}-b_{n+1})$$

であるから，

$$d_n=c_{n+1}-c_n=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots\cdots+(a_n-b_n)+(a_{n+1}-b_{n+1})$$

$$=S_{n+1}-T_{n+1}\text{（⑤）}\quad \text{答}$$

したがって，(1) と (2) により，

$$d_n=6(n+1)^2-12(n+1)-6(3^{n+1}-1)=6n^2-2\cdot 3^{n+2}\quad \text{答}$$

数列 $\{c_n\}$ の階差数列は $\{d_n\}$ であり，

$$c_1=a_1-b_1=-12-6=\mathbf{-18} \quad 答$$

であるから，$n\geqq 2$ のとき

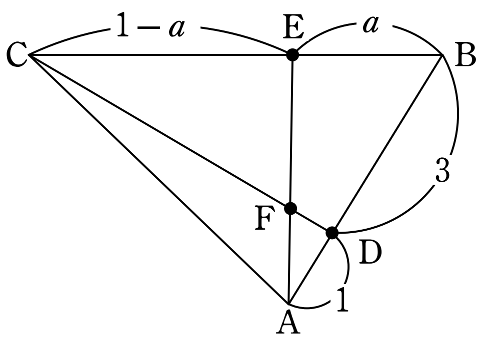
$$c_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}d_k=-18+\sum_{k=1}^{n-1}(6k^2-2\cdot 3^{k+2})$$

$$=-18+6\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-54\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1}$$

$$=\mathbf{2n^3-3n^2+n+9-3^{n+2}} \quad 答$$

これは $n=1$ のときも成立する．

第4問



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{FB}}-\overrightarrow{\mathrm{FA}}=\vec{q}-\vec{p}$ （②） 答

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2 \quad \cdots①$ 答

(2) $\overrightarrow{\mathrm{FD}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{FA}}+\overrightarrow{\mathrm{FB}}}{4}=\dfrac{3}{4}\vec{p}+\dfrac{1}{4}\vec{q}$ 答

(3) $\overrightarrow{\mathrm{FD}}=s\vec{r}$ より，

$$\frac{3}{4}\vec{p}+\frac{1}{4}\vec{q}=s\vec{r} \qquad \therefore\ \vec{q}=-3\vec{p}+4s\vec{r} \quad \cdots③ \quad 答$$

$\overrightarrow{\mathrm{FE}}=t\vec{p}$ より，

$$t\vec{p}=(1-a)\vec{q}+a\vec{r} \qquad \therefore\ \vec{q}=\frac{t}{1-a}\vec{p}-\frac{a}{1-a}\vec{r} \quad \cdots④$$

$\vec{p}\neq\vec{0}$，$\vec{r}\neq\vec{0}$，$\vec{p}\not\parallel\vec{r}$ であるから，③，④ より，

$$-3=\frac{t}{1-a},\quad 4s=-\frac{a}{1-a} \qquad \therefore\ s=\frac{-a}{4(1-a)},\quad t=-3(1-a) \quad 答$$

(4) ① より $|\vec{p}|=1$ に注意すると，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{q}-\vec{p}|^2=1-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{\mathrm{FE}}-\overrightarrow{\mathrm{FB}}=t\vec{p}-\vec{q}$ かつ $t=-3(1-a)$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2=t^2-2t\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2=9(1-a)^2+6(1-a)\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2 \quad 答$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|$ であるから，

$$1-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2=|\vec{q}|^2+6(1-a)\vec{p}\cdot\vec{q}+9(1-a)^2$$

$$2(3a-4)\vec{p}\cdot\vec{q}=(3a-4)(3a-2)$$

$0<a<1$ より $3a-4\neq 0$ であるから，$\vec{p}\cdot\vec{q}=\dfrac{3a-2}{2}$ 答