2018年度　センター試験 数学ⅠA（本試験）　ワンポイント解説

第1問

〔1〕

$(x+n)(n+5-x)=x(5-x)+n^2+\mathbf{5}n$ 答

$X=x(5-x)$ とおくと

$A=\{x(5-x)\}\{(x+1)(6-x)\}\{(x+2)(7-x)\}$

$\quad=\{x(5-x)\}\{-x^2+5x+6\}\{-x^2+5x+14\}$

$\quad=\{x(5-x)\}\{x(5-x)+6\}\{x(5-x)+14\}$

$\quad=X(X+\mathbf{6})(X+\mathbf{14})$ 答

$X=x(5-x)$ に $x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ を代入して，$X=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\cdot\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}=\dfrac{8}{4}=\mathbf{2}$ 答

$A=X(X+6)(X+14)$ に $X=2$ を代入して，$A=2\cdot8\cdot16=2^{\mathbf{8}}$ 答

〔2〕

(1)

$A=\{x\mid x\in U$ かつ x は20の約数$\}=\{1,2,4,5,10,20\}$

$B=\{x\mid x\in U$ かつ x は3の倍数$\}=\{3,6,9,12,15,18\}$

$C=\{x\mid x\in U$ かつ x は偶数$\}=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$

(a) $A\subset C$ … 集合 A の要素である1が集合 C の要素にないため，誤り。

(b) $A\cap B=\varnothing$ … 集合 A と集合 B に共通の要素がないため，正しい。

よって，(a)誤(b)正で②　答

(c) $A\cup C=\{1,2,4,5,6,8,10,12,14,16,18,20\}$

$B=\{3,6,9,12,15,18\}$ より，$(A\cup C)\cap B=\{6,12,18\}$ は正しい。

(d) $\overline{A}\cap C=\{6,8,12,14,16,18\}$

$B=\{3,6,9,12,15,18\}$

よって，$(\overline{A}\cap C)\cup B=\{3,6,8,9,12,14,15,16,18\}$ …①

また，$B\cup C=\{2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20\}$

よって，$\overline{A}\cap(B\cup C)=\{3,6,8,9,12,14,15,16,18\}$ …②

①と②を比較して，$(\overline{A}\cap C)\cup B=\overline{A}\cap(B\cup C)$ は正しい。よって，(c)正(d)正で⓪　答

(2)

$p:x<0,\ 4<x$

$q:x<0$

$r:x>4$

$s:x<-4,\ 4<x$

q または $r \rightleftarrows p$（ともに真）より　必要十分条件である。②　答

$s \longleftarrow r$ は真で，$s \longrightarrow r$ は偽 より　必要条件であるが，十分条件ではない。⓪　答

〔3〕

$f(x)=ax^2-2(a+3)x-3a+21$

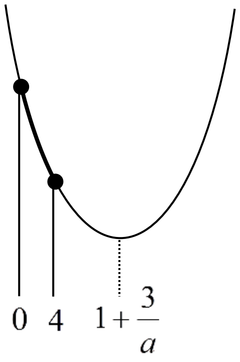
$\quad=a\left(x-\dfrac{a+3}{a}\right)^2-4a+15-\dfrac{9}{a}$

頂点の x 座標 $p=\dfrac{a+3}{a}=\mathbf{1}+\dfrac{\mathbf{3}}{a}$ 答

第2問

〔1〕

$f(4)$ が最小となるのは，以下の図。

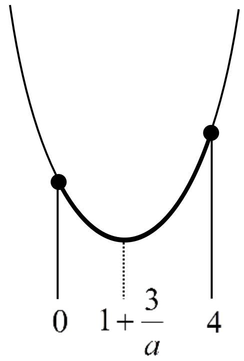


（ⅰ）$4 \leqq 1+\frac{3}{a}$ のとき

すなわち，

$0 < a \leqq \mathbf{1}$ 答

$f(p)$ が最小となるのは，以下の図。



（ⅱ）$0 < 1+\frac{3}{a} \leqq 4$ のとき

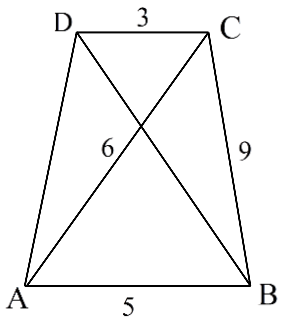
すなわち，

$\mathbf{1} \leqq a$ 答

最小値が1より，

（ⅰ）のとき　$f(4) = 5a-3 = 1$　　$a = \mathbf{\frac{4}{5}}$ 答

（ⅱ）のとき　$f(p) = -4a+15-\frac{9}{a} = 1$　　$a = \mathbf{\frac{7+\sqrt{13}}{4}}$ 答



余弦定理より，$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{5^2+9^2-6^2}{2\cdot5\cdot9} = \mathbf{\frac{7}{9}}$ 答

$\sin\angle\mathrm{ABC} = \sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2} = \mathbf{\frac{4\sqrt{2}}{9}}$ 答

$\mathrm{CD}=3$，$\mathrm{AB}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC} = 5\cdot\frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{20\sqrt{2}}{9} = \frac{28.\cdots}{9}$ より，

$\mathrm{CD} \;<\; \mathrm{AB}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}$　∴ ⓪ 答

よって，辺ABと辺CDが平行である。∴ ④ 答

（辺ADと辺BCが平行ならば，辺 $\mathrm{CD} > \mathrm{AB}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}$ でなければならない。）

$\angle\mathrm{ABC} = \theta$ とおくと，$\angle\mathrm{BCD} = 180° - \theta$ なので，△BCDで余弦定理より，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{BD}^2 &= 3^2+9^2-2\cdot3\cdot9\cos(180°-\theta) \\
&= 9+81-54(-\cos\theta) \\
&= 132
\end{aligned}
$$

よって，$\mathrm{BD} = \mathbf{2\sqrt{33}}$ 答

〔2〕

(1)

ヒストグラムと箱ひげ図を読み取って，①，⑥ 答

(2)

$Z = \frac{W}{X}$ より，散布図において，Z は原点と点 $(X\ ,W)$ を結ぶ直線の傾きである。

散布図から Z の値を読み取ると，

男子短距離… Z の中央値は約23と読み取れるので，箱ひげ図の(a)

男子長距離… Z の中央値は約20で最小値が約15と読み取れるので，箱ひげ図の(c)

女子短距離… Z の中央値は約21で最小値が約17と読み取れるので，箱ひげ図の(b)

女子長距離… Z の中央値は約18と読み取れるので，箱ひげ図の(d)

これより，④，⑤ 答

	(3)	$(x_1-\overline{x})(w_1-\overline{w})+(x_2-\overline{x})(w_2-\overline{w})+\cdots+(x_n-\overline{x})(w_n-\overline{w})$ $=x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n$ $\quad-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\overline{w}-\overline{x}(w_1+w_2+\cdots+w_n)+n\overline{x}\overline{w}$ $=x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n-n\overline{x}\overline{w}-n\overline{x}\overline{w}+n\overline{x}\overline{w}$ $=x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n-\boldsymbol{n\overline{x}\overline{w}}$ ② 答
第3問	(1)	$P(A)=\mathbf{\frac{1}{6}}$ 答 $P(B)=\frac{6}{36}=\mathbf{\frac{1}{6}}$ 答 ← 事象 B …(大, 小) $=(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$ $P(C)=\frac{4}{36}=\mathbf{\frac{1}{9}}$ 答 ← 事象 C …(大, 小) $=(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)$
	(2)	$P_c(A)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{9}}=\mathbf{\frac{1}{4}}$ 答 ←事象 $A\cap C$ …(大, 小) $=(4,5)$ $P_A(C)=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}}=\mathbf{\frac{1}{6}}$ 答
	(3)	$P(A\cap B)=\frac{1}{36}$, $P(A)P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$ より $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ ① 答 $P(A\cap C)=\frac{1}{36}$, $P(A)P(C)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{54}$ より $P(A\cap C)>P(A)P(C)$ ② 答
	(4)	1回目 $A\cap B\cdots\frac{1}{36}$, 2回目 $\overline{A}\cap C\cdots\frac{3}{36}$ ← (大, 小) $=(3,6),(5,4),(6,3)$ $\therefore\ \frac{1}{36}\times\frac{3}{36}=\mathbf{\frac{1}{432}}$ 答 事象 A, B, C が1回ずつ起こるのは (ⅰ) 1回目 $A\cap B$ → 2回目 $\overline{A}\cap C$ $\cdots\frac{1}{432}$ (ⅱ) 1回目 $\overline{A}\cap C$ → 2回目 $A\cap B$ $\cdots\frac{1}{432}$ (ⅲ) 1回目 $\overline{A}\cap B$ → 2回目 $A\cap C$ $\cdots\frac{5}{36}\times\frac{1}{36}$ (ⅳ) 1回目 $A\cap C$ → 2回目 $\overline{A}\cap B$ $\cdots\frac{1}{36}\times\frac{5}{36}$ (ⅰ)〜(ⅳ)を加えて, $\mathbf{\frac{1}{81}}$ 答

第4問

(1)

$144 = 2^4 \times 3^2$ $\boxed{\text{答}}$　　144の約数は$2^l \times 3^m$（$l = 0,1,2,3,4$，$m = 0,1,2$）と表せるので
約数の個数は，$5\times 3 = \mathbf{15}$ $\boxed{\text{答}}$

(2)

$144x - 7y = 1$ の整数解 x，y について，x の絶対値が最小のものは，
$x=0$，$x=\pm 1$のとき，y は整数にならない。$x=2$ のとき $y=41$　$\therefore x=\mathbf{2}$，$y=\mathbf{41}$ $\boxed{\text{答}}$

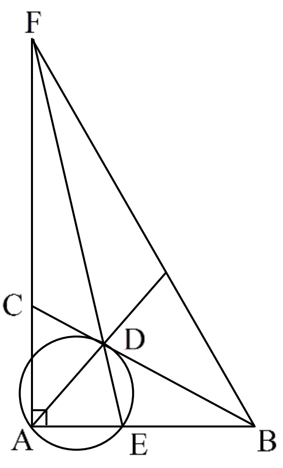
$$\begin{array}{rl} & 144x-7y=1 \\ -) & 144\cdot 2-7\cdot 41=1 \\ \hline & 144(x-2)-7(y-41)=0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x-2=7k \\ y-41=144k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\mathbf{7}k+2 \\ y=\mathbf{144}k+41 \end{cases} \boxed{\text{答}}$$

(3)

144の倍数を$144x$（xは整数），$144x$を7で割った商をyとおくと，$144x = 7y+1$
$144x - 7y = 1$　　よって，(1)，(2)より$144x = 2^4\times 3^2 \times (7k+2)$と変形できる。
$k=0, 1, 2, \cdots$として，の正の約数の個数を調べると，
$k=0 \rightarrow 144x = 2^4\times 3^2\times 2 = 2^5\times 3^2$ となり正の約数の個数は$6\times 3 = 18$個
$k=1 \rightarrow 2^4\times 3^4 \rightarrow 25$個，　$k=2 \rightarrow 2^8\times 3^2 \rightarrow 27$個，
$k=3 \rightarrow 2^4\times 3^2\times 23 \rightarrow 30$個
正の約数の個数が18個となる最小のものは$144\times\mathbf{2}$ $\boxed{\text{答}}$
正の約数の個数が30個となる最小のものは$144\times\mathbf{23}$ $\boxed{\text{答}}$

第5問



三平方の定理より，$\mathrm{BC}=\sqrt{5}$
また角の二等分線の定理より，$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=2:1$なので，
$\mathrm{BD}=\dfrac{\mathbf{2\sqrt{5}}}{\mathbf{3}}$ $\boxed{\text{答}}$

方べきの定理より，$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BE}=\mathrm{BD}^2=\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2=\dfrac{\mathbf{20}}{\mathbf{9}}$ $\boxed{\text{答}}$

$\mathrm{AB}=2$を代入して，$\mathrm{BE}=\dfrac{\mathbf{10}}{\mathbf{9}}$ $\boxed{\text{答}}$

$\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ より，$\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}}<\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$　0 $\boxed{\text{答}}$
よって，交点Fは辺ACの端点**C**の側の延長上。 4 $\boxed{\text{答}}$

メネラウスの定理より，$\dfrac{\mathrm{FA}}{\mathrm{CF}}\times\dfrac{\mathrm{EB}}{\mathrm{AE}}\times\dfrac{\mathrm{DC}}{\mathrm{BD}}=1$　　$\mathrm{AE}=2-\dfrac{10}{9}=\dfrac{8}{9}$なので，
$\dfrac{\mathrm{FA}}{\mathrm{CF}}\times\dfrac{10}{8}\times\dfrac{1}{2}=1$　　$\therefore \dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{AF}}=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}$ $\boxed{\text{答}}$

これに$\mathrm{AF}=\mathrm{CF}+1$を代入して，$\mathrm{CF}=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$ $\boxed{\text{答}}$

$\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{AB}}$より，辺BCは$\angle\mathrm{ABF}$の二等分線であり，
辺ADが$\angle\mathrm{BAC}$の二等分線であることに注意すると，点Dは$\triangle\mathrm{ABF}$の**内心**。1 $\boxed{\text{答}}$