# 2017年度　センター試験 数学ⅡＢ（本試験）　ワンポイント解説

**第1問**

〔1〕

①より$(2\cos^2\alpha-1)+(2\cos^2\beta-1)=\dfrac{4}{15}$　∴ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\dfrac{17}{15}$ 答

また、② より　$\cos^2\alpha\cos^2\beta=\left(\dfrac{2\sqrt{15}}{15}\right)^2=\dfrac{4}{15}$ 答

よって、解と係数の関係より、$\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$ は $t$ の2次方程式

$$t^2-\frac{17}{15}t+\frac{4}{15}=0 \iff (5t-4)(3t-1)=0$$

の2解であるから、③より $\cos^2\alpha \geqq \cos^2\beta$ に注意してこれを解くと、

$$\cos^2\alpha=\frac{4}{5},\quad \cos^2\beta=\frac{1}{3}$$ 答

② と $\alpha<\beta$ より、$\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\beta=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$ 答

〔2〕

$\log_2 p$ の真数の条件により $p>0$ 答, $q>0$ である。

線分ABを1：2に内分する点の座標は、$\left(\dfrac{1}{3}p,\ \dfrac{1}{3}\log_2 p+1\right)$ 答

これがCの座標と一致するので、$\begin{cases} \dfrac{1}{3}p=q & \cdots④ \\ \dfrac{1}{3}\log_2 p+1=\log_2 q & \cdots⑤ \end{cases}$

⑤ より　$\log_2 p=3(\log_2 q-1)=\log_2\left(\dfrac{q}{2}\right)^3$　∴ $p=\dfrac{1}{8}q^3$　…⑥ 答

④,⑥ より　$q(q^2-24)=0$　　∴ $q=2\sqrt{6}$, $p=6\sqrt{6}$ 答

このとき、Cの $y$ 座標は、

$$\log_2 2\sqrt{6}=\frac{3}{2}+\log_2\sqrt{3}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{1}{2}\log_{10}3}{\log_{10}2}=2.2925$$

であるから、小数第2位を四捨五入して、**2.3 ⑥** 答

**第2問**

(1)　$y=x^2+1$ より $y'=2x$

よって、$(t, t^2+1)$ における接線の方程式は

$$y-(t^2+1)=2t(x-t) \quad ∴\ y=2tx-t^2+1$$ 答

この直線が点P$(a, 2a)$を通るとき、

$$2a=2ta-t^2+1 \quad ∴\ t^2-2at+2a-1=0$$ 答

を満たすから、これを解いて、

$$(t-1)\{t-(2a-1)\}=0 \qquad ∴\ t=2a-1,\ 1$$ 答

これらが一致するとき、接線は1本しか引けないから、

$2a-1 \fallingdotseq 1 \quad \therefore\ a \fallingdotseq 1$ 答

このとき点Pを通る$C$の2本の接線は

$t=2a-1 \implies y=(4a-2)x-4a^2+4a$ 答

$t=1 \implies y=2x$ 答

(2) $r=-4a^2+4a>0$ より、 $4a(a-1)<0 \quad \therefore\ 0<a<1$ 答

このとき三角形OPR の面積$S$は、$S=\dfrac{1}{2}\cdot r\cdot a=2(a^2-a^3)$ 答

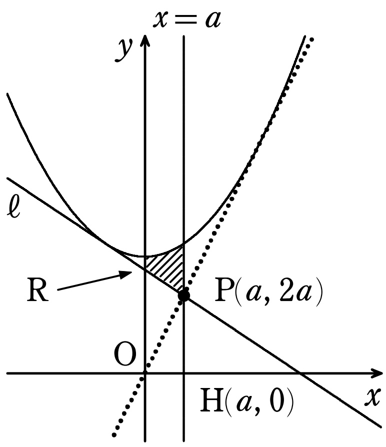
$S=f(a)$ とおくと、$f'(a)=2a(2-3a)$ であるから、$0<a<1$ における$S$の増減は次のようになる。

| $a$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{2}{3}$ | $\cdots$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $S$ | | ↗ | 極大 | ↘ | |

したがって、$a=\dfrac{2}{3}$ のとき 最大値 $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{8}{27}$ 答

(3) H$(a,\ 0)$ とする。

$T$は右図の斜線部分の面積だから、




$$T=\int_0^a (x^2+1)dx-S-\triangle\mathrm{OPH}$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^a-2(a^2-a^3)-\frac{1}{2}\cdot a\cdot 2a$$

$$=\frac{7}{3}a^3-3a^2+a$$ 答

$T=g(a)$ とおくと、$g'(a)=7a^2-6a+1$

$g'(a)=0$ となるのは、$a=\dfrac{3\pm\sqrt{2}}{7}<\dfrac{2}{3}$

したがって、$\dfrac{2}{3}\leqq a<1$ において、$T$は増加する。② 答

第3問

(1) $s_n=1\cdot 2^{n-1}$ より $s_1=1,\ s_2=2,\ s_3=2^2=4$ であるから、

$s_1s_2s_3=1\cdot 2\cdot 4=8$ 答, $s_1+s_2+s_3=1+2+4=7$ 答

(2)　$s_n = x \cdot r^{n-1}$ であるから、① より

$$x \cdot xr \cdot xr^2 = x^3 r^3 = a^3 \qquad \therefore\ xr = a \quad \cdots③$$ 答　($\because$ $x$, $r$ は実数)

同様に ② から $x + xr + xr^2 = b$ であるから、③ より $x = \dfrac{a}{r}$ を代入して、

$$\frac{a}{r} + a + ra = b \qquad \therefore\ ar^2 + (a-b)r + a = 0 \quad \cdots④$$ 答

④ の判別式を $D$ とすると、④ を満たす実数 $r$ が存在するので、

$$D = (a-b)^2 - 4a^2 \geqq 0 \qquad \therefore\ 3a^2 + 2ab - b^2 \leqq 0 \quad \cdots⑤$$ 答

(3)　$a = 64$, $b = 336$ のとき ④ より

$$64r^2 - 272r + 64 = 0 \qquad \therefore\ (4r-1)(r-4) = 0$$

$r > 1$ より、　$r = 4$,　$x = \dfrac{64}{4} = 16$ 答

このとき、$s_n = 16 \cdot 4^{n-1} = 4^{n+1}$ であるから、

$$t_n = 4^{n+1} \log_4 4^{n+1} = (n+1) \cdot 4^{n+1}$$ 答

このとき、

$$U_n = 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^4 + \cdots\cdots + (n+1) \cdot 4^{n+1}$$

$$4U_n = \qquad 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^4 + \cdots\cdots + n \cdot 4^{n+1} \qquad + (n+1) \cdot 4^{n+2}$$

であるから、辺々の差をとると、

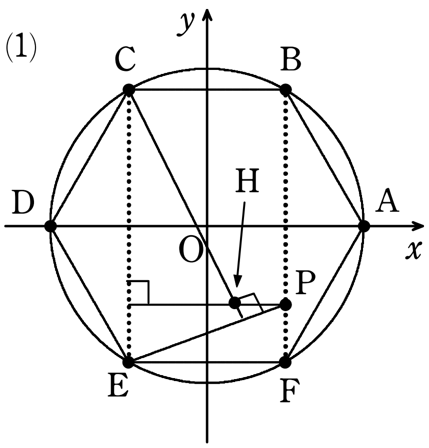
$$-3U_n = 32 + 4^3 + 4^4 + \cdots\cdots + 4^{n+1} - (n+1) \cdot 4^{n+2}$$

$$= 32 + \frac{4^3(4^{n-1}-1)}{4-1} - (n+1) \cdot 4^{n+2}$$

$$= \frac{32}{3} - \frac{3n+2}{3} \cdot 4^{n+2} \qquad \therefore\ U_n = \frac{3n+2}{9} \cdot 4^{n+2} - \frac{32}{9}$$ 答

第4問

(1)




$\angle \mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$ より、

$\mathrm{B}\left(2\cos\dfrac{\pi}{3},\ 2\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$　$\therefore$ $\mathrm{B}(1,\ \sqrt{3})$ 答

$\mathrm{D}(-2,\ 0)$ 答

$\therefore$ $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (1,\ \sqrt{3})$,　$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (-2,\ 0)$

同様にして、

$\mathrm{C}(-1,\ \sqrt{3})$,　$\mathrm{E}(-1,\ -\sqrt{3})$

(2)　点MはBDの中点であるから、

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{2}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(-\frac{5}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ 答

また、$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ \sqrt{3})$ 答 であるから、

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+r\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\left(2-\frac{5}{2}r,\ \frac{\sqrt{3}}{2}r\right),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(s-2,\ \sqrt{3}\,s)$$

このとき、$\begin{cases} 2-\dfrac{5}{2}r=s-2 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}r=\sqrt{3}\,s \end{cases}$　これを解くと、$r=\dfrac{4}{3},\quad s=\dfrac{2}{3}$ 答

したがって、$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\left(-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 答

(3)　$\mathrm{P}(1,\ a)$ より、$\overrightarrow{\mathrm{EP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(2,\ a+\sqrt{3})$ 答

また、HはPを通りCEに垂直な直線上にあるから、実数 $k$ を用いて $\mathrm{H}(k,\ a)$とおけて、

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(k,\ a)-(-1,\ \sqrt{3})=(k+1,\ a-\sqrt{3})$$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{EP}}$ より、$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EP}}=0$ であるから、

$$2k+2+a^2-3=0 \qquad \therefore\ k=\frac{-a^2+1}{2}$$

よって、$\mathrm{H}\left(\dfrac{-a^2+1}{2},\ a\right)$ 答

このとき、

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{a^2+1},\quad |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-1)^2+(2a)^2}=\frac{1}{2}(a^2+1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{-a^2+1}{2}+a^2=\frac{1}{2}(a^2+1)$$

であるから、

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}|}=\frac{\frac{1}{2}(a^2+1)}{\sqrt{a^2+1}\cdot\frac{1}{2}(a^2+1)}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$ より、　$\dfrac{12}{13}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$　　$\therefore\ a=\pm\dfrac{5}{12}$ 答