2016年度　センター試験 数学ⅡＢ（本試験）　ワンポイント解説

第1問 〔1〕

(1)　$8^{\frac{5}{6}}=(2^3)^{\frac{5}{6}}=2^{\frac{5}{2}}=\mathbf{4\sqrt{2}}$ 答,　$\log_{27}\dfrac{1}{9}=\dfrac{\log_3\frac{1}{9}}{\log_3 27}=\dfrac{\mathbf{-2}}{\mathbf{3}}$ 答

(2)　$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$　　∴ y 軸に関して対称❷ 答

$y=\log_2 x \iff x=2^y$　　∴ $y=x$ に関して対称❸ 答

$y=\log_{\frac{1}{2}} x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2\frac{1}{2}}=-\log_2 x$　　∴ x 軸に関して対称❶ 答

$y=\log_2\dfrac{1}{x}=-\log_2 x$　　∴ x 軸に関して対称❶ 答

(3)　$y=(\log_2 x-\log_2 4)^2-4\cdot\dfrac{\log_2 x}{\log_2 4}+3$

$=(t-2)^2-2t+3=\mathbf{t^2-6t+7}$ 答

$x>0$ のとき $t=\log_2 x$ の取り得る値の範囲は、全実数❸答　である。

したがって、$y=(t-3)^2-2$ より

$\mathbf{t=3}$ 答　∴ $\mathbf{x=2^3=8}$ 答 のとき　最小値 $\mathbf{-2}$ 答　をとる。

〔2〕

(1)　① の両辺に $\sin^2 x\cos^2 x$ をかけて、

$\sin^2 x\cos^2 x(\cos^2 x-\sin^2 x)+k(\sin^2 x-\cos^2 x)=0$

∴ $\left(\dfrac{\sin^2 2x}{4}-k\right)\cos 2x=0$ 答　…②

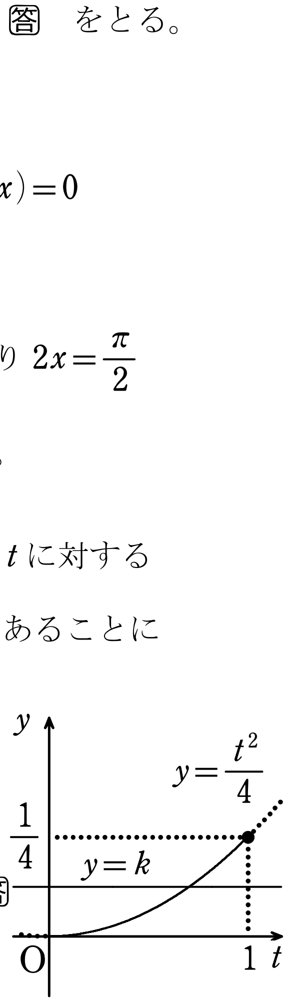
$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<2x<\pi$ であるから、$\cos 2x=0$ より $2x=\dfrac{\pi}{2}$

∴ $\mathbf{x=\dfrac{\pi}{4}}$ 答 のとき、k の値に関係なく①が成り立つ。

また、$\dfrac{\sin^2 2x}{4}-k=0$ において $t=\sin 2x$ とおくと、t に対する

x の個数は、$0<t<1$ のとき 2 個, $t=1$ のとき 1 個 であることに

注意して、$y=\dfrac{t^2}{4}$, $y=k$ の共有点の個数を考えて、



$k>\dfrac{1}{4}$ 答 のとき　$x=\dfrac{\pi}{4}$ のみの 1個

$0<k<\dfrac{1}{4}$ のとき　$0<t<1$で 1 個から、x は 3個 答

$k=\dfrac{1}{4}$ のとき　$x=\dfrac{\pi}{4}$のみの 1個 答

(2)　$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ において $\sin 2x>0$, $\cos 2x<0$ であるから、

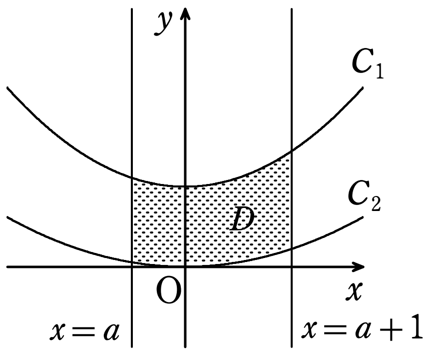
$k=\dfrac{4}{25}$ のとき ② より、$\sin^2 2x=\dfrac{16}{25}$　∴ $\sin 2x=\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$ 答

よって、$\cos 2x=\dfrac{\mathbf{-3}}{\mathbf{5}}$ 答　したがって、2 倍角の公式より、

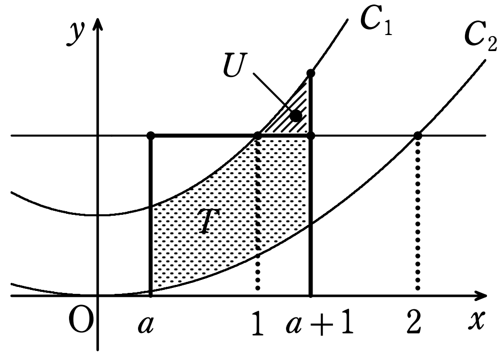
$2\cos^2 x-1=-\dfrac{3}{5}$　　∴ $\cos x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\because\ \dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 答

第２問

[図１]



[図２]



(1) [図１] より、

$$S=\int_a^{a+1}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}x^2\right\}dx=\int_a^{a+1}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}x^2+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)dx \text{ 答}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_a^{a+1}=\frac{\mathbf{a^2}}{\mathbf{4}}+\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{4}}+\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{12}} \text{ 答}$$

$$S=\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{48}\qquad a=\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}} \text{ 答のとき　最小値 } \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{48}} \text{ 答}$$

(2)　$1=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ より　$x=\pm 1$　　∴ C_1 と $(\pm\mathbf{1}, 1)$ 答 で交わる

$1=\dfrac{1}{4}x^2$ より　$x=\pm 2$　　∴ C_2 と $(\pm\mathbf{2}, 1)$ 答 で交わる

正方形 R と 図形 D の共通部分が空集合にならないのは、

[図２]より $\mathbf{0}\leqq a\leqq\mathbf{2}$ 答 のときである。

また、$1\leqq a\leqq 2$ において、a が増加するとき T は減少 ⓵ 答する。

$0\leqq a\leqq 1$ のとき、[図２]より

$$U=\int_1^{a+1}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}-1\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^{a+1}=\frac{\mathbf{a^3}}{\mathbf{6}}+\frac{\mathbf{a^2}}{\mathbf{2}} \text{ 答}$$

よって、

$$T=S-U=-\frac{a^3}{6}-\frac{a^2}{4}+\frac{a}{4}+\frac{7}{12}\ \text{答}\ (=f(a)\text{とおく})$$

$$f'(a)=-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}(2a^2+2a-1)$$

$0\leqq a\leqq 1$ において $f'(a)=0$ となるとき、

$$2a^2+2a-1=0 \quad \therefore\ a=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

a	0		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		1
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		↗	極大	↘	

したがって、増減表より $a=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ 答 のとき最大値をとる。

第3問

(1) 分母が $k+1$ となるものが第 k 群となる群数列と考える。

a_{15} は 第 5 群の最後の数であるから、$a_{15}=\dfrac{5}{6}$ 答

分母に初めて 8 が現れるのは 7 群の最初の数であるから、

$$\sum_{k=1}^{6} k+1=\frac{1}{2}(1+6)\times 6+1=22 \qquad \therefore\ a_{22}\ \text{答}$$

(2) $\dfrac{1}{k}$ が初めて現れるのは 第 $k-1$ 群の最初の数, $\dfrac{k-1}{k}$ が初めて現れるのは$k-1$ 群の最後の数であるから、

$$M_k=\sum_{i=1}^{k-2} i+1=\frac{1}{2}k^2-\frac{3}{2}k+2\ \text{答},\quad N_k=\sum_{i=1}^{k-1} i=\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k\ \text{答}$$

a_{104} が k 群に含まれるとき、

$$N_k<104\leqq N_{k+1} \iff k(k-1)<208\leqq k(k+1)$$

これを満たすのは $k=14$ であり、第 13 群までの項数は、$\displaystyle\sum_{k=1}^{13} k=91$ であるから、$104-91=13$ より a_{104} は第 14 群の 13 番目の数である。

したがって、$a_{104}=\dfrac{13}{15}$ 答

(3) 第 M_k 項から第 N_k 項までの和は $\dfrac{1}{k},\ \dfrac{2}{k},\ \cdots,\ \dfrac{k-1}{k}$ の和であるから、$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{k-1}{k}\right)\times(k-1)=\dfrac{1}{2}k-\dfrac{1}{2}$ $\boxed{\text{答}}$ これは第 $k-1$ 群内の和を表す。

したがって、初項から第 N_k 項までの和は $\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{2}i=\frac{1}{4}k^2-\frac{1}{4}k$ $\boxed{\text{答}}$

以上より、a_{103} は第 14 群の 12 番目の項であるから、

$$\sum_{n=1}^{103}a_n=\left(\frac{1}{4}\cdot14^2-\frac{1}{4}\cdot14\right)+\frac{1}{15}(1+2+\cdots+12)=\frac{507}{10}\ \boxed{\text{答}}$$

第4問

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=3\cdot2\cdot\cos60^\circ=3$ $\boxed{\text{答}}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=2\cdot2\cdot\cos60^\circ=2$ $\boxed{\text{答}}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}-s\vec{a}$ より、

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2=(1-t)^2\left|\vec{b}\right|^2+t^2\left|\vec{c}\right|^2+s^2\left|\vec{a}\right|^2-2s(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+2t(1-t)\vec{b}\cdot\vec{c}-2st\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$=9s^2+4t^2-6s-4t+4=(3s-1)^2+(2t-1)^2+2\ \boxed{\text{答}}$$

となるから、$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|$ が最小となるのは、

$3s-1=0,\ 2t-1=0\quad\therefore\ s=\dfrac{1}{3},\ t=\dfrac{1}{2}$ $\boxed{\text{答}}$ のとき $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=\sqrt{2}$ $\boxed{\text{答}}$

(2) $s=\dfrac{1}{3},\ t=\dfrac{1}{2}$ より、$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{a}\cdot\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=-\frac{1}{3}\left|\vec{a}\right|^2+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}=0\ \boxed{\text{答}}$$

であるから、$\angle\mathrm{APQ}=90^\circ$ $\boxed{\text{答}}$ である。したがって、

$$\triangle\mathrm{APQ}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AP}\cdot\mathrm{PQ}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\ \boxed{\text{答}}$$

また、$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\left\{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}\right)\right\}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ $\boxed{\text{答}}$

であるから、点Gは線分AQを $2:1$ $\boxed{\text{答}}$ に内分する点である。

よって、$\triangle\mathrm{GPQ}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ $\boxed{\text{答}}$