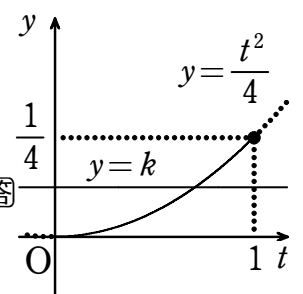


第1問	[1]	<p>(1) <math>8^{\frac{5}{6}} = (2^3)^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{5}{2}} = 4\sqrt{2}</math> 答, <math>\log_{27} \frac{1}{9} = \frac{\log_3 \frac{1}{9}}{\log_3 27} = \frac{-2}{3}</math> 答</p> <p>(2) <math>y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x} \quad \therefore y</math> 軸に関して対称 ② 答</p> <p><math>y = \log_2 x \Leftrightarrow x = 2^y \quad \therefore y = x</math> に関して対称 ③ 答</p> <p><math>y = \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2 x \quad \therefore x</math> 軸に関して対称 ① 答</p> <p><math>y = \log_2 \frac{1}{x} = -\log_2 x \quad \therefore x</math> 軸に関して対称 ① 答</p> <p>(3) <math>y = (\log_2 x - \log_2 4)^2 - 4 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + 3</math></p> <p><math>= (t-2)^2 - 2t + 3 = t^2 - 6t + 7</math> 答</p> <p><math>x &gt; 0</math> のとき <math>t = \log_2 x</math> の取り得る値の範囲は、全実数 ③ 答 である。</p> <p>したがって、<math>y = (t-3)^2 - 2</math> より</p> <p><math>t = 3</math> 答 <math>\therefore x = 2^3 = 8</math> 答 のとき 最小値 <math>-2</math> 答 をとる。</p>
	[2]	<p>(1) ① の両辺に <math>\sin^2 x \cos^2 x</math> をかけて、</p> <p><math>\sin^2 x \cos^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x) + k(\sin^2 x - \cos^2 x) = 0</math></p> <p><math>\therefore \left(\frac{\sin^2 2x}{4} - k\right) \cos 2x = 0</math> 答 ...②</p> <p><math>0 &lt; x &lt; \frac{\pi}{2}</math> より <math>0 &lt; 2x &lt; \pi</math> であるから、<math>\cos 2x = 0</math> より <math>2x = \frac{\pi}{2}</math></p> <p><math>\therefore x = \frac{\pi}{4}</math> 答 のとき、<math>k</math> の値に関係なく①が成り立つ。</p> <p>また、<math>\frac{\sin^2 2x}{4} - k = 0</math> において <math>t = \sin 2x</math> とおくと、<math>t</math> に対する <math>x</math> の個数は、<math>0 &lt; t &lt; 1</math> のとき 2 個、<math>t = 1</math> のとき 1 個 であることに注意して、<math>y = \frac{t^2}{4}</math>, <math>y = k</math> の共有点の個数を考えて、</p> <p><math>k &gt; \frac{1}{4}</math> 答 のとき <math>x = \frac{\pi}{4}</math> のみの 1 個</p> <p><math>0 &lt; k &lt; \frac{1}{4}</math> のとき <math>0 &lt; t &lt; 1</math> で 1 個から、<math>x</math> は 3 個 答</p> <p><math>k = \frac{1}{4}</math> のとき <math>x = \frac{\pi}{4}</math> のみの 1 個 答</p> 

(2)  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$  において  $\sin 2x > 0$ ,  $\cos 2x < 0$  であるから、

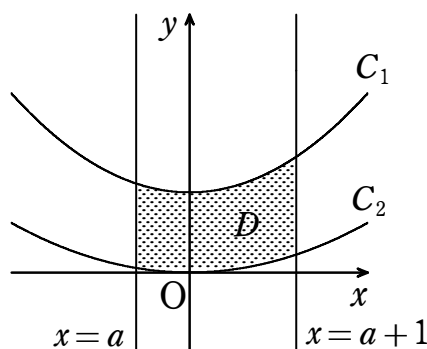
$$k = \frac{4}{25} \text{ のとき ② より、} \sin^2 2x = \frac{16}{25} \quad \therefore \sin 2x = \frac{4}{5} \text{ 答}$$

よって、 $\cos 2x = -\frac{3}{5}$  答 したがって、2倍角の公式より、

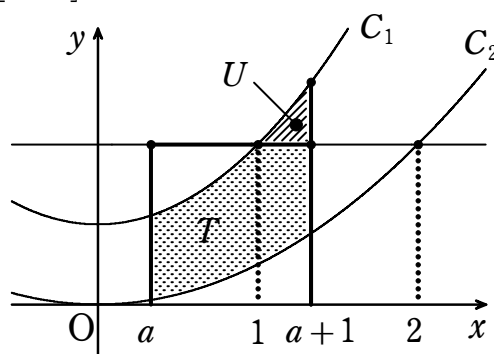
$$2\cos^2 x - 1 = -\frac{3}{5} \quad \therefore \cos x = \frac{\sqrt{5}}{5} \left( \because \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \right) \text{ 答}$$

第2問

[図1]



[図2]



(1) [図1] より、

$$S = \int_a^{a+1} \left\{ \left( \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4}x^2 \right\} dx = \int_a^{a+1} \left( \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \right) dx \text{ 答}$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_a^{a+1} = \frac{a^2}{4} + \frac{a}{4} + \frac{7}{12} \text{ 答}$$

$$S = \frac{1}{4} \left( a + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{25}{48} \quad a = \frac{-1}{2} \text{ 答 のとき 最小値 } \frac{25}{48} \text{ 答}$$

(2)  $1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$  より  $x = \pm 1$   $\therefore C_1$  と  $(\pm 1, 1)$  答 で交わる

$1 = \frac{1}{4}x^2$  より  $x = \pm 2$   $\therefore C_2$  と  $(\pm 2, 1)$  答 で交わる

正方形  $R$  と 図形  $D$  の共通部分が空集合にならないのは、

[図2]より  $0 \leq a \leq 2$  答 のときである。

また、 $1 \leq a \leq 2$  において、 $a$  が増加するとき  $T$  は減少  $\textcircled{0}$  答 する。

$0 \leq a \leq 1$  のとき、[図2]より

$$U = \int_1^{a+1} \left( \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - 1 \right) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3}x^3 - x \right]_1^{a+1} = \frac{a^3}{6} + \frac{a^2}{2} \text{ 答}$$

よって、

$$T = S - U = -\frac{a^3}{6} - \frac{a^2}{4} + \frac{a}{4} + \frac{7}{12} \text{ ㊟ } (= f(a) \text{ とおく})$$

$$f'(a) = -\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}(2a^2 + 2a - 1)$$

$0 \leq a \leq 1$  において  $f'(a) = 0$  となるとき、

$$2a^2 + 2a - 1 = 0 \quad \therefore a = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

$a$	0		$\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$		1
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$		↗	極大	↘	

したがって、増減表より  $a = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$  ㊟ のとき最大値をとる。

第3問

(1) 分母が  $k+1$  となるものが第  $k$  群となる群数列と考える。

$$a_{15} \text{ は第5群の最後の数であるから、} a_{15} = \frac{5}{6} \text{ ㊟}$$

分母に初めて 8 が現れるのは 7 群の最初の数であるから、

$$\sum_{k=1}^6 k + 1 = \frac{1}{2}(1+6) \times 6 + 1 = 22 \quad \therefore a_{22} \text{ ㊟}$$

(2)  $\frac{1}{k}$  が初めて現れるのは第  $k-1$  群の最初の数、 $\frac{k-1}{k}$  が初めて

現れるのは  $k-1$  群の最後の数であるから、

$$M_k = \sum_{i=1}^{k-2} i + 1 = \frac{1}{2}k^2 - \frac{3}{2}k + 2 \text{ ㊟}, \quad N_k = \sum_{i=1}^{k-1} i = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k \text{ ㊟}$$

$a_{104}$  が  $k$  群に含まれるとき、

$$N_k < 104 \leq N_{k+1} \iff k(k-1) < 208 \leq k(k+1)$$

これを満たすのは  $k=14$  であり、第 13 群までの項数は、 $\sum_{k=1}^{13} k = 91$

であるから、 $104 - 91 = 13$  より  $a_{104}$  は第 14 群の 13 番目の数である。

したがって、 $a_{104} = \frac{13}{15}$  ㊟

(3) 第  $M_k$  項から第  $N_k$  項までの和は  $\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}$  の和であるから、 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{k-1}{k}\right) \times (k-1) = \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}$  ㊦ これは第  $k-1$  群内の和を表す。

したがって、初項から第  $N_k$  項までの和は  $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2}i = \frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{4}k$  ㊦

以上より、 $a_{103}$  は第 14 群の 12 番目の項であるから、

$$\sum_{n=1}^{103} a_n = \left(\frac{1}{4} \cdot 14^2 - \frac{1}{4} \cdot 14\right) + \frac{1}{15}(1+2+\dots+12) = \frac{507}{10} \text{ ㊦}$$

第4問

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 3 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 3 \text{ ㊦}, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 2 \text{ ㊦}$$

(1)  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c} - s\vec{a}$  より、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 &= (1-t)^2|\vec{b}|^2 + t^2|\vec{c}|^2 + s^2|\vec{a}|^2 \\ &\quad - 2s(1-t)\vec{a} \cdot \vec{b} + 2t(1-t)\vec{b} \cdot \vec{c} - 2st\vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= 9s^2 + 4t^2 - 6s - 4t + 4 = (3s-1)^2 + (2t-1)^2 + 2 \text{ ㊦} \end{aligned}$$

となるから、 $|\overrightarrow{PQ}|$  が最小となるのは、

$$3s-1=0, 2t-1=0 \quad \therefore s = \frac{1}{3}, t = \frac{1}{2} \text{ ㊦ のとき } |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2} \text{ ㊦}$$

(2)  $s = \frac{1}{3}, t = \frac{1}{2}$  より、 $\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{PQ} = \vec{a} \cdot \left(-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = -\frac{1}{3}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \text{ ㊦}$$

であるから、 $\angle APQ = 90^\circ$  ㊦ である。したがって、

$$\triangle APQ = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ ㊦}$$

また、 $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \left\{ \overrightarrow{OA} + 2 \left( \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} \right) \right\} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{OQ}$  ㊦

であるから、点Gは線分AQを2:1㊦に内分する点である。

よって、 $\triangle GPQ = \frac{1}{3} \triangle APQ = \frac{\sqrt{2}}{3}$  ㊦

