2016年度　センター試験 数学ⅠA (本試験)　ワンポイント解説

第1問

[1]

$f(x)=(1+2a)(1-x)+(2-a)x$

$=(-3a+1)x+2a+1$

(1) $-3a+1\geqq 0 \Leftrightarrow a\leqq\frac{1}{3}$ のとき，最小値 $f(0)=2a+1$

$-3a+1<0 \Leftrightarrow a>\frac{1}{3}$ のとき，最小値 $f(1)=-a+2$

(2) $a\leqq\frac{1}{3}$ のとき $2a+1\geqq\frac{2(a+2)}{3}$ より $a\geqq\frac{1}{4}$

$a>\frac{1}{3}$ のとき $-a+2\geqq\frac{2(a+2)}{3}$ より $a\leqq\frac{2}{5}$

∴ $\frac{1}{4}\leqq a\leqq\frac{2}{5}$

[2]

(1)　(i) $A\supset\{0\}$ ③　(ii) $\sqrt{28}\in B$ ⓪　(iii) $A=\{0\}\cup A$ ⑤　(iv) $\emptyset=A\cap B$ ④

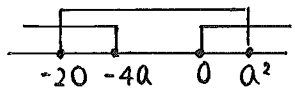
(2)　$p\Rightarrow q$ は明らかに不成立
$q\Rightarrow p$ は真
∴ p は必要条件 ①

$p\Rightarrow r$ は，例えば $x=\sqrt{2}$ で不成立
$r\Rightarrow p$ は，例えば $x=0$ で不成立
∴ p は必要条件でも十分条件でもない ③

[3]

$x^2+(20-a^2)x-20a^2\leqq 0$
$(x+20)(x-a^2)\leqq 0$
$-20\leqq x\leqq a^2$

$x^2+4ax\geqq 0$
$x(x+4a)\geqq 0$
$x\leqq -4a,\ 0\leqq x$



連立不等式を満たす負の x が存在するためには $-20\leqq -4a$　∴ $a\leqq 5$

第2問

[1]

Oの半径をRとすると

正弦定理より $\frac{7\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2R$　∴ $R=7$

(1) $2PA=3PB$ より $PA:PB=3:2$

よって，$PA=3k$ $PB=2k$ とおいて△APBに余弦定理を用いると

$(7\sqrt{3})^2=(3k)^2+(2k)^2-2\cdot 3k\cdot 2k\cos 60^\circ$　∴ $k=\sqrt{21}$

よって $PA=3k=3\sqrt{21}$

(2) △PABの面積が最大となるのは，$PA=PB$ のときで

$\angle APB=60^\circ$ よりこのとき△PABは正三角形となる　∴ $PA=7\sqrt{3}$

(3) $\sin\angle PBA$ が最大となるのは $\angle PBA=90^\circ$ のときで

このとき PA は外接円の直径となる　∴ $PA=2R=14$

また，このとき $PB=7$ となるので △PABの面積は $\frac{1}{2}AB\cdot PB=\frac{49\sqrt{3}}{2}$

[2] 正しいものは⓪, ③

[3]

(1) 正しいものは⑤

(2) 正しいものは①, ③

(3) 一般に $y=ax+b$ のとき

平均 $\overline{y}=a\overline{x}+b$, 分散 $s_y^2=a^2s_x^2$ なので

$a=\frac{9}{5}$ とすると $Y=\left(\frac{9}{5}\right)^2X$ $\quad\therefore \frac{Y}{X}=\frac{81}{25}$ ⑨

一般に共分散 $s_{xy}=\frac{1}{n}\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})$ において

$y=az+b$ とすると $\overline{y}=a\overline{z}+b$ なので

$$s_{xz}=\frac{1}{n}\Sigma(x-\overline{x})(z-\overline{z})$$

$$=a\times\frac{1}{n}\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})=a\cdot s_{xy}$$

$a=\frac{9}{5}$ とすると $W=\frac{9}{5}z$ $\quad\therefore \frac{W}{z}=\frac{9}{5}$ ⑧

なお、相関係数は変量や単位のとり方に影響されないので $V=U$ $\quad\therefore \frac{V}{U}=1$ ⑦

第3問

(1) 赤または青が少なくとも1コ $=1-$(2コとも白) $=1-\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}=\frac{28}{33}$

(2) (Aが赤)かつ(Bが白) $=\frac{4}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{5}{33}$

Aが赤のとき、Bが白 $=\dfrac{(\text{Aが赤})かつ(\text{Bが白})}{\text{Aが赤}}=\dfrac{\frac{5}{33}}{\frac{4}{12}}=\frac{5}{11}$

注 残り11コ中白5コなので $\frac{5}{11}$ としてもよい

(3) (Aが青)かつ(Bが白) $=\frac{3}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{5}{44}$

Bが白 $=(A,B)=(赤,白)+(青,白)+(白,白)=\frac{4}{12}\cdot\frac{5}{11}+\frac{3}{12}\cdot\frac{5}{11}+\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}=\frac{5}{12}$

注 全12コ中、白5コなので $\frac{5}{12}$ としてもよい

よって

Bが白のとき、Aが白 $=\dfrac{\text{AもBも白}}{\text{Bが白}}=\dfrac{\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}}{\frac{5}{12}}=\frac{4}{11}$

第4問

(1) $92x+197y=1$ −①

互除法を用いると

$$\begin{cases}197=92\cdot2+13\\92=13\cdot7+1\end{cases}$$

よって

$92\cdot15+197(-7)=1$ −②

①−②より

$92(x-15)+197(y+7)=0$

$92(x-15)=-197(y+7)$

92と197は互いに素なので

$$\begin{cases}x-15=-197k\\y+7=92k\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}x=-197k+15\\y=92k-7\end{cases}\ (k:整数)$$

$|x|$が最小となるのは $k=0$ のときで

このとき $x=15,\ y=-7$

$92x+197y=10$ －③

②の両辺を10倍して

$92\cdot150+197(-70)=10$ －④

③－④より

$92(x-150)+197(y+70)=0$

これより

$$\begin{cases} x=-197l+150 \\ y=92l-70 \end{cases} \quad (l:\text{整数})$$

$|x|$が最小となるのは $l=1$ のときで

このとき $\underline{x=-47,\ y=22}$

(2) $11011_{(2)}=1\times2^4+1\times2^3+1\times2+1$

$=1\times4^2+2\times4+3=\underline{123_{(4)}}$

$0.3_{(6)}=3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}=0.5_{(10)}$

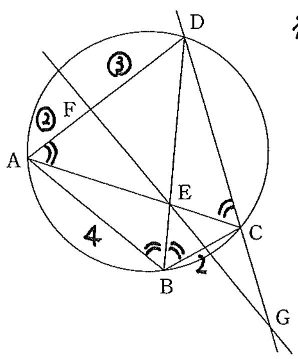
$0.43_{(6)}=4\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6^2}=\frac{3}{4}=0.75_{(10)}$

$0.043_{(6)}=4\cdot\frac{1}{6^2}+3\cdot\frac{1}{6^3}=\frac{1}{8}=0.125_{(10)}$

よって

$\underline{⓪③⑤}$が有限小数で表せる

第5問



条件と円周角の定理より $\angle DAC=\angle DCA=\angle DBC=\angle ABD$

よって、角の2等分線の定理より

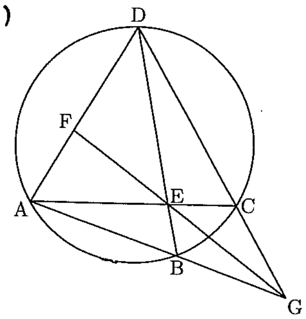
$AE:EC=BA:BC=2:1 \quad \therefore \frac{EC}{AE}=\underline{\frac{1}{2}}$

また、メネラウスの定理より

$\frac{DG}{GC}\times\frac{FA}{DF}\times\frac{EC}{AE}=1$

$\frac{DG}{GC}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=1 \quad \therefore \frac{GC}{DG}=\underline{\frac{1}{3}}$

(1)



図において

チェバの定理より

$\frac{BG}{AB}\times\frac{CD}{GC}\times\frac{FA}{DF}=1 \quad \frac{BG}{4}\times\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}=1 \quad \therefore BG=\underline{3}$

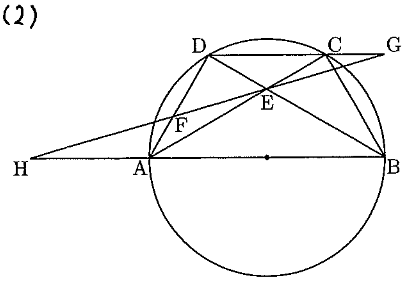
また $GC=x$ とおくと

方べきの定理より

$GC\cdot DG=GB\cdot GA$

$x\cdot3x=3\cdot7 \quad x=\sqrt{7} \quad \therefore DC=2x=\underline{2\sqrt{7}}$

(2)



□ABCDの外接円の直径が最小となるのは

ABが直径のときなので、直径は $\underline{4}$ となる

また、このとき $\angle ACB=90°$ より $\angle BAC=\underline{30°}$ である

さらに、条件より $\triangle ABD\equiv\triangle BAC$ なので

□ABCDは等脚台形

よって $\frac{GC}{DG}=\frac{1}{3}$ および相似を利用して

$\underline{AH=2}$