2016年度　センター試験 数学ⅠA（本試験）　ワンポイント解説

第1問

[1]

$f(x)=(1+2a)(1-x)+(2-a)x$

$\quad=\underline{(-3a+1)}x+2a+1$

(1) $-3a+1\geqq 0 \Leftrightarrow a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき．最小値 $f(0)=\underline{2a+1}$

$-3a+1<0 \Leftrightarrow a>\dfrac{1}{3}$ のとき．最小値 $f(1)=\underline{-a+2}$

(2) $a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき $2a+1\geqq\dfrac{2(a+2)}{3}$ より $a\geqq\dfrac{1}{4}$

$a>\dfrac{1}{3}$ のとき $-a+2\geqq\dfrac{2(a+2)}{3}$ より $a\leqq\dfrac{2}{5}$

$\therefore\ \underline{\dfrac{1}{4}\leqq a\leqq\dfrac{2}{5}}$

[2]

(1) (i) $A\supset\{0\}$ ③　(ii) $\sqrt{28}\in B$ ⓪　(iii) $A=\{0\}\cup A$ ⑤　(iv) $\emptyset=A\cap B$ ④

(2) $p\Rightarrow q$ は明らかに不成立

$q\Rightarrow p$ は真

$\therefore$ p は $\underline{必要条件}$ ①

$p\Rightarrow r$ は．例えば $x=\sqrt{2}$ で不成立

$r\Rightarrow p$ は．例えば $x=0$ で不成立

$\therefore$ p は $\underline{必要条件でも十分条件でもない}$ ③

[3]

$x^2+(20-a^2)x-20a^2\leqq 0$

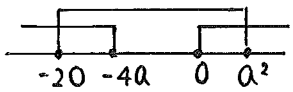
$(x+20)(x-a^2)\leqq 0$

$\underline{-20}\leqq x\leqq a^2$

$x^2+4ax\geqq 0$

$x(x+4a)\geqq 0$

$x\leqq\underline{-4a}$．$\underline{0}\leqq x$



連立不等式を満たす負の x が存在するためには $-20\leqq -4a$　$\therefore\ \underline{a\leqq 5}$

第2問

[1]

Oの半径を R とすると

正弦定理より $\dfrac{7\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2R$　$\therefore\ \underline{R=7}$

(1) $2PA=3PB$ より $PA:PB=3:2$

よって．$PA=3k$ $PB=2k$ とおいて $\triangle APB$ に余弦定理を用いると

$(7\sqrt{3})^2=(3k)^2+(2k)^2-2\cdot 3k\cdot 2k\cos 60^\circ$　$\therefore\ k=\sqrt{21}$

よって $PA=3k=\underline{3\sqrt{21}}$

(2) $\triangle PAB$ の面積が最大となるのは．$PA=PB$ のときで

$\angle APB=60^\circ$ よりこのとき $\triangle PAB$ は正三角形となる　$\therefore\ PA=\underline{7\sqrt{3}}$

(3) $\sin\angle PBA$ が最大となるのは $\angle PBA=90^\circ$ のときで

このとき PA は外接円の直径となる　$\therefore\ PA=2R=\underline{14}$

また．このとき $PB=7$ となるので $\triangle PAB$ の面積は $\dfrac{1}{2}AB\cdot PB=\underline{\dfrac{49\sqrt{3}}{2}}$

[2] 正しいものは⓪, ③

[3]

(1) 正しいものは⑤

(2) 正しいものは①, ③

(3) 一般に $y=ax+b$ のとき

平均 $\bar{y}=a\bar{x}+b$, 分散 $s_y^2=a^2 s_x^2$ なので

$a=\frac{9}{5}$ とすると $Y=\left(\frac{9}{5}\right)^2 X$ $\quad\therefore \frac{Y}{X}=\frac{81}{25}$ ⑨

一般に共分散 $s_{xy}=\frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ において

$y=az+b$ とすると $\bar{y}=a\bar{z}+b$ なので

$s_{xz}=\frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})(z-\bar{z})$

$=a\times\frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})=a\cdot s_{xy}$

$a=\frac{9}{5}$ とすると $W=\frac{9}{5}Z$ $\quad\therefore \frac{W}{Z}=\frac{9}{5}$ ⑧

なお, 相関係数は変量や単位のとり方に影響されないので $V=U$ $\quad\therefore \frac{V}{U}=1$ ⑦

第3問

(1) 赤または青が少なくとも1コ $=1-$(2コとも白) $=1-\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}=\frac{28}{33}$

(2) (Aが赤)かつ(Bが白) $=\frac{4}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{5}{33}$

Aが赤のとき, Bが白 $=\dfrac{\text{(Aが赤)かつ(Bが白)}}{\text{Aが赤}}=\dfrac{\frac{5}{33}}{\frac{4}{12}}=\frac{5}{11}$

注 残り11コ中白5コなので $\frac{5}{11}$ としてもよい

(3) (Aが青)かつ(Bが白) $=\frac{3}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{5}{44}$

Bが白 $=$ (A, B) $=$ (赤, 白) $+$ (青, 白) $+$ (白, 白) $=\frac{4}{12}\cdot\frac{5}{11}+\frac{3}{12}\cdot\frac{5}{11}+\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}=\frac{5}{12}$

注 全12コ中, 白5コなので $\frac{5}{12}$ としてもよい

よって

Bが白のとき, Aが白 $=\dfrac{\text{AもBも白}}{\text{Bが白}}=\dfrac{\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}}{\frac{5}{12}}=\frac{4}{11}$

第4問

(1) $92x+197y=1$ —①

互除法を用いると

$$\begin{cases}197=92\cdot2+13\\ 92=13\cdot7+1\end{cases}$$

よって

$92\cdot15+197(-7)=1$ —②

①−②より

$92(x-15)+197(y+7)=0$

$92(x-15)=-197(y+7)$

92と197は互いに素なので

$$\begin{cases}x-15=-197k\\ y+7=92k\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}x=-197k+15\\ y=92k-7\end{cases}\ (k:\text{整数})$$

$|x|$ が最小となるのは $k=0$ のときで

このとき $x=15,\ y=-7$

$92x+197y=10$ ― ③

②の両辺を10倍して

$92\cdot150+197(-70)=10$ ― ④

③−④より

$92(x-150)+197(y+70)=0$

これより

$\begin{cases} x=-197\ell+150 \\ y=92\ell-70 \end{cases}$ (ℓ:整数)

$|x|$が最小となるのは $\ell=1$ のときで

このとき $x=-47,\ y=22$

(2) $11011_{(2)} = 1\times2^4+1\times2^3+1\times2+1$

$= 1\times4^2+2\times4+3 = 123_{(4)}$

$0.3_{(6)} = 3\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 0.5_{(10)}$

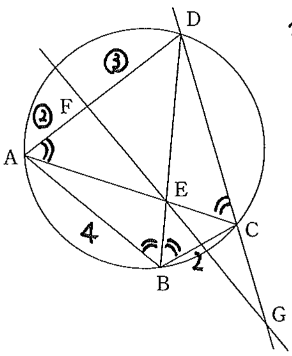
$0.43_{(6)} = 4\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6^2} = \frac{3}{4} = 0.75_{(10)}$

$0.043_{(6)} = 4\cdot\frac{1}{6^2}+3\cdot\frac{1}{6^3} = \frac{1}{8} = 0.125_{(10)}$

よって

⓪③⑤が有限小数で表せる

第5問



条件と円周角の定理より $\angle DAC=\angle DCA=\angle DBC=\angle ABD$

よって、角の2等分線の定理より

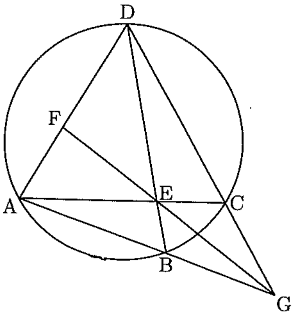
$AE:EC = BA:BC = 2:1$ $\therefore \frac{EC}{AE} = \frac{1}{2}$

また、メネラウスの定理より

$\frac{DG}{GC}\times\frac{FA}{DF}\times\frac{EC}{AE} = 1$

$\frac{DG}{GC}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = 1$ $\therefore \frac{GC}{DG} = \frac{1}{3}$

(1)



図において

チェバの定理より

$\frac{BG}{AB}\times\frac{CD}{GC}\times\frac{FA}{DF} = 1$ $\frac{BG}{4}\times\frac{2}{1}\times\frac{2}{3} = 1$ $\therefore BG = 3$

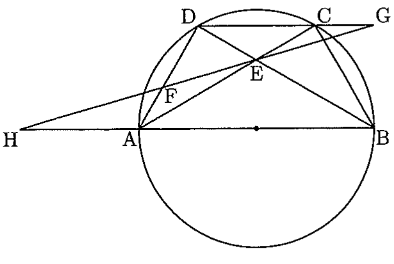
また $GC=x$ とおくと

方べきの定理より

$GC\cdot DG = GB\cdot GA$

$x\cdot3x = 3\cdot7$ $x=\sqrt{7}$ $\therefore DC = 2x = 2\sqrt{7}$

(2)



□ABCDの外接円の直径が最小となるのは

ABが直径のときなので、直径は4となる

また、このとき $\angle ACB=90°$ より $\angle BAC=30°$ である

さらに、条件より $\triangle ABD\equiv\triangle BAC$ なので

□ABCDは等脚台形

よって $\frac{GC}{DG}=\frac{1}{3}$ および相似を利用して

$AH=2$