

2015年度 センター試験 数学ⅡB (本試験) ワンポイント解説

<p>第1問</p>	<p>〔1〕</p>	<p>(1) $OP = \sqrt{(2\cos\theta)^2 + (2\sin\theta)^2} = \sqrt{4(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \underline{2}$ $PQ = \sqrt{(2\cos\theta + \cos 7\theta - 2\cos\theta)^2 + (2\sin\theta + \sin 7\theta - 2\sin\theta)^2} = \underline{1}$ $OQ^2 = (2\cos\theta + \cos 7\theta)^2 + (2\sin\theta + \sin 7\theta)^2$ $= 5 + 4(\cos 7\theta \cos \theta + \sin 7\theta \sin \theta) = \underline{5 + 4\cos 6\theta}$ $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ より $\frac{3}{4}\pi \leq 6\theta \leq \frac{3}{2}\pi \dots (a)$ であるから、 $-1 \leq \cos 6\theta \leq 0 \quad \therefore 1 \leq 5 + 4\cos 6\theta \leq 5$ $OQ > 0$ より OQ^2 が最大のとき、OQ も最大となるから、 OQ が最大となるのは、 $\cos 6\theta = 0 \quad \therefore \underline{\theta = \frac{\pi}{4}}$ のとき 最大値 $\sqrt{5}$ ($\because (a)$) (2) 直線 OP の方程式は、 $y = (\tan\theta)x = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}x \quad \therefore (\sin\theta)x - (\cos\theta)y = 0 \quad (3)$ 点 Q がこの直線上にあるとき、 $(\sin\theta)(2\cos\theta + \cos 7\theta) - (\cos\theta)(2\sin\theta + \sin 7\theta) = 0$ $\sin\theta \cos 7\theta - \cos\theta \sin 7\theta = 0 \quad \therefore \sin 6\theta = 0$ $\frac{3}{4}\pi \leq 6\theta \leq \frac{3}{2}\pi$ より、 $6\theta = \pi \quad \therefore \underline{\theta = \frac{\pi}{6}}$ (3) $\angle OQP = 90^\circ$ とするとき、$\triangle OQP$ は直角三角形だから、 $OP^2 = OQ^2 + PQ^2 \quad \therefore \underline{OQ = \sqrt{3}}$ よって、 $OQ^2 = 5 + 4\cos 6\theta = 3 \quad \therefore \cos 6\theta = -\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}\pi \leq 6\theta \leq \frac{3}{2}\pi$ より、 $6\theta = \frac{4}{3}\pi \quad \therefore \underline{\theta = \frac{2}{9}\pi}$ 〔2〕 (1) $x\sqrt{y} = a$ より、$x^2y^3 = a^2 \dots (1)$, $\sqrt[3]{x}y = b$ より、$xy^3 = b^3 \dots (2)$ (2) より、$y^3 = \frac{b^3}{x}$ ($\because x > 0$) であるから、(1) に代入して、 $x^2 \cdot \frac{b^3}{x} = a^2 \quad \therefore \underline{x = \frac{a^2}{b^3} = a^2 b^{-3}}$ (2) に代入して、 $a^2 b^{-3} y^3 = b^3, \quad y^3 = \frac{b^6}{a^2} \quad \therefore y = (b^6 a^{-2})^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{2}{3}} b^2 \quad \therefore \underline{P = -\frac{2}{3}}$</p>
------------	------------	---

(2) $x = a^2(2^3\sqrt{a^4})^{-3} = 2^{-3} \cdot a^2 \cdot a^{-4} = \frac{2^{-3} \cdot a^{-2}}{\#}$
 $y = a^{-\frac{2}{3}}(2^3\sqrt{a^4})^2 = 2^2 \cdot a^{-\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{8}{3}} = \frac{2^2 \cdot a^2}{\#}$
 $x > 0, y > 0$ であるから、相加・相乗平均の不等式より、
 $x + y = 2^{-3}a^{-2} + 2^2 \cdot a^2 \geq 2\sqrt{2^{-3}a^{-2} \times 2^2 \cdot a^2} = \sqrt{2} \quad \therefore \underline{\text{最小値 } \sqrt{2}}_{\#}$
等号が成立するのは、
 $2^{-3} \cdot a^{-2} = 2^2 \cdot a^2, \quad a^4 = 2^{-5} \quad \therefore a = 2^{-\frac{5}{4}} \quad \therefore \underline{g = -\frac{\sqrt{2}}{4}}_{\#}$

第2問

(1) 平均変化率は $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{2}(a+h)^2 - \frac{1}{2}a^2}{h} = \underline{a + \frac{h}{2}}_{\#}$

$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} (a + \frac{h}{2}) = \underline{a}_{\#}$

(2) C上の点 $P(a, \frac{1}{2}a^2)$ における接線は、

$l: y = a(x-a) + \frac{1}{2}a^2 = \underline{ax - \frac{1}{2}a^2}_{\#}$

lとx軸の交点は $y=0$ とし、 $Q(\frac{a}{2}, 0)$

点Qを通りlに垂直な直線は、

$m: y = -\frac{1}{a}(x - \frac{a}{2}) = \underline{-\frac{1}{a}x + \frac{1}{2}}_{\#}$

mとy軸の交点は $x=0$ とし、 $A(0, \frac{1}{2})$

点Pからx軸へ垂線PP'を下ろすと、

$S = (\text{台形 } AOP'P) - (\triangle OAQ) - (\triangle P'PQ) = \underline{\frac{a(a^2+1)}{8}}_{\#}$

$T = (\text{台形 } AOP'P) - \int_0^a \frac{1}{2}x^2 dx = \underline{\frac{a(a^2+3)}{12}}_{\#}$

$S > T$ のとき、

$S - T = \frac{a(a^2+1)}{8} - \frac{a(a^2+3)}{12} = \underline{\frac{a(a^2-3)}{24}}_{\#} (=g(a) \text{ とおく})$

$S - T > 0$ とするとき、

$a^2 - 3 > 0 \quad \therefore \underline{a > \sqrt{3}} \text{ (} \because a > 0 \text{)}_{\#}$

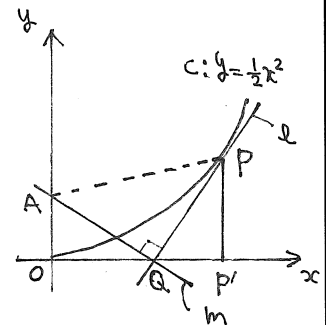
また、 $g'(a) = \frac{1}{8}(a-1)(a+1)$ であるから、増減は下の様になる。

a	0	1	
g(a)	-	0	+
g(a)	↘		↗

したがって、

$a = 1$ のとき、

最小値 $g(1) = \underline{-\frac{1}{12}}_{\#}$



第3問

(1) 2^n を順に書くと $2, 4, 8, 16, 32, \dots$ $\therefore a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16, a_5 = 32$
 数列 $\{a_n\}$ は 4 つの項と等しいから $a_{n+4} = a_n$ ③

(2) $b_{n+4} = \frac{a_{n+3}}{4} b_{n+3} = \frac{a_{n+2}}{4} \cdot \frac{a_{n+1}}{4} b_{n+2} = \dots = \frac{a_{n+2} a_{n+1} a_n a_{n-1}}{4^4} b_n = \frac{a_{n+2} a_{n+1} a_n a_{n-1}}{2^8} b_n$

($a_{n+4} = a_n$ より)

$a_{n+2} a_{n+1} a_n a_{n-1} = a_4 a_3 a_2 a_1 = 6 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 2 = 3 \cdot 2^7$

よって

$b_{n+4} = \frac{3 \cdot 2^7}{2^8} b_n = \frac{3}{2} b_n$

これを解くと

$b_{4k+3} = b_1 \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}$, $b_{4k+2} = b_2 \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$

$b_{4k+1} = b_3 \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$, $b_{4k} = b_4 \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$

(3) $S_{4m} = \sum_{k=1}^m (b_{4k-3} + b_{4k-2} + b_{4k-1} + b_{4k}) = \sum_{k=1}^m 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = \frac{3 \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^m - 1 \right\}}{\frac{3}{2} - 1} = 6 \left(\frac{3}{2}\right)^m - 6$

(4) $b_{4k-3} b_{4k-2} b_{4k-1} b_{4k} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}\right)^{4(k-1)}$

$T_{4m} = (b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4) \cdot (b_5 \cdot b_6 \cdot b_7 \cdot b_8) \cdot \dots \cdot (b_{4m-3} \cdot b_{4m-2} \cdot b_{4m-1} \cdot b_{4m})$

$= \frac{1}{4^m} \left(\frac{3}{2}\right)^{4\{0+1+2+\dots+(m-1)\}} = \frac{1}{4^m} \left(\frac{3}{2}\right)^{4 \cdot \frac{1}{2} m(m-1)} = \frac{1}{4^m} \left(\frac{3}{2}\right)^{2m^2 - 2m}$

$\therefore T_4 = T_8 \cdot b_9 \cdot b_{10} = \frac{1}{4^2} \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^8}{2^{13}}$

第4問

(1) $AP:PB = 2:1$ より $\vec{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

$\vec{OQ} = \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ より $\vec{OQ} = (1-t)\vec{b} + t(\vec{b} - \vec{a}) = -t\vec{a} + \vec{b}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = 0$ ($\vec{OP} \perp \vec{OQ}$)

よって $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = \frac{1}{3} \{-t|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 + (1-2t)\vec{a} \cdot \vec{b}\} = 0$

$\therefore t = \frac{5}{4}$

また $|\vec{OP}|^2 = \frac{1}{9} (|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{1}{9}$ $\therefore |\vec{OP}| = \frac{\sqrt{13}}{3}$

$|\vec{OQ}|^2 = \frac{1}{16} (|\vec{b}|^2 + 25|\vec{a}|^2 - 40\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{21}{16}$ $\therefore |\vec{OQ}| = \frac{\sqrt{21}}{4}$

$S_1 = \frac{1}{2} |\vec{OP}| |\vec{OQ}| = \frac{7\sqrt{3}}{24}$

(2) $\vec{OT} = r\vec{OR} = -\frac{r}{4}\vec{a} + r\vec{b}$, $\vec{OT} = (1-s)\vec{OP} + s\vec{OQ} = \left(\frac{1}{3} - \frac{19}{12}s\right)\vec{a} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}s\right)\vec{b}$

$\vec{a} \neq \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{a}$, $\vec{b} + \vec{b}$ より係数比較して

$s = \frac{1}{3}$, $r = \frac{7}{9}$, $\vec{OT} = -\frac{7}{36}\vec{a} + \frac{7}{9}\vec{b}$

$OT:TK = 7:2$, $PT:TQ = 1:2$ より

$S_2 = \Delta PRT = \frac{2}{11} \Delta OPT = \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{3} \Delta OPQ = \frac{2}{21} \Delta OPQ$ $\therefore S_1:S_2 = 21:2$

