2015 年度　センター試験 数学ⅡB（本試験）　ワンポイント解説

第1問

〔1〕

(1) $OP=\sqrt{(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2}=\sqrt{4(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\underline{2}$

$PQ=\sqrt{(2\cos\theta+\cos7\theta-2\cos\theta)^2+(2\sin\theta+\sin7\theta-2\sin\theta)^2}=\underline{1}$

$OQ^2=(2\cos\theta+\cos7\theta)^2+(2\sin\theta+\sin7\theta)^2$

$=5+4(\cos7\theta\cos\theta+\sin7\theta\sin\theta)=\underline{5+4\cos6\theta}$

$\frac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ より $\frac{3}{4}\pi\leqq6\theta\leqq\frac{3}{2}\pi$ …(a) であるから、

$-1\leqq\cos6\theta\leqq0$ 　$\therefore\ 1\leqq5+4\cos6\theta\leqq5$

$OQ>0$ より OQ^2 が最大のとき、OQも最大となるから、

OQが最大となるのは、

$\cos6\theta=0$ 　$\therefore\ \underline{\theta=\frac{\pi}{4}\text{ のとき 最大値 }\sqrt{5}}$ (∵(a))

(2) 直線OPの方程式は、

$y=(\tan\theta)x=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}x$ 　$\therefore\ \underline{(\sin\theta)x-(\cos\theta)y=0}$ ③

点Qがこの直線上にあるとき、

$(\sin\theta)(2\cos\theta+\cos7\theta)-(\cos\theta)(2\sin\theta+\sin7\theta)=0$

$\sin\theta\cos7\theta-\cos\theta\sin7\theta=0$ 　$\therefore\ \sin6\theta=0$

$\frac{3}{4}\pi\leqq6\theta\leqq\frac{3}{2}\pi$ より、

$6\theta=\pi$ 　$\therefore\ \underline{\theta=\frac{\pi}{6}}$

(3) $\angle OQP=90^\circ$ となるとき、$\triangle OQP$ は直角三角形だから、

$OP^2=OQ^2+PQ^2$ 　$\therefore\ \underline{OQ=\sqrt{3}}$

よって、

$OQ^2=5+4\cos6\theta=3$ 　$\therefore\ \cos6\theta=-\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}\pi\leqq6\theta\leqq\frac{3}{2}\pi$ より、

$6\theta=\frac{4}{3}\pi$ 　$\therefore\ \underline{\theta=\frac{2}{9}\pi}$

〔2〕

(1) $x\sqrt{y^3}=a$ より、$x^2y^3=a^2$ …①，$\sqrt[3]{x}\,y=b$ より、$xy^3=b^3$ …②

②より、$y^3=\frac{b^3}{x}$ (∵ $x>0$) であるから、①に代入して、

$x^2\cdot\frac{b^3}{x}=a^2$ 　$\therefore\ \underline{x=\frac{a^2}{b^3}=a^2b^{-3}}$

②に代入して、

$a^2b^{-3}y^3=b^3$，$y^3=\frac{b^6}{a^2}$ 　$\therefore\ y=(b^6a^{-2})^{\frac{1}{3}}=\underline{a^{-\frac{2}{3}}b^2}$ 　$\therefore\ \underline{p=-\frac{2}{3}}$

(2) $x = a^2(2\sqrt[3]{a^4})^{-3} = 2^{-3}\cdot a^2\cdot a^{-4} = \underline{2^{-3}\cdot a^{-2}}$

$y = a^{-\frac{2}{3}}(2\sqrt[3]{a^4})^2 = 2^2\cdot a^{-\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{8}{3}} = \underline{2^2\cdot a^2}$

$x>0,\ y>0$であるから、相加・相乗平均の不等式より、

$x+y = 2^{-3}a^{-2} + 2^2\cdot a^2 \geqq 2\sqrt{2^{-3}\cdot a^{-2}\times 2^2\cdot a^2} = \sqrt{2}$　∴ 最小値 $\sqrt{2}$

等号が成立するのは、

$2^{-3}\cdot a^{-2} = 2^2\cdot a^2$,　$a^4 = 2^{-5}$　∴ $a = 2^{-\frac{5}{4}}$　∴ $g = -\frac{5}{4}$

第2問

(1) 平均変化率は $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{\frac{1}{2}(a+h)^2 - \frac{1}{2}a^2}{h} = \underline{a + \dfrac{h}{2}}$

$f'(a) = \lim_{h\to 0}\left(a + \dfrac{h}{2}\right) = \underline{a}$

(2) C上の点 $P(a, \frac{1}{2}a^2)$ における接線は、

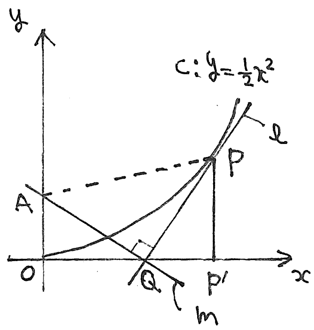
$l:\ y = a(x-a) + \frac{1}{2}a^2 = \underline{ax - \frac{1}{2}a^2}$

lとx軸の交点は$y=0$として、$\underline{Q\left(\frac{a}{2}, 0\right)}$

点Qを通りlに垂直な直線は、

$m:\ y = -\frac{1}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right) = \underline{\frac{-1}{a}x + \frac{1}{2}}$

mとy軸の交点は$x=0$として $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$



点Pからx軸へ垂線PP'を下ろすと、

$S = (\text{台形 } AOP'P) - (\triangle OAQ) - (\triangle P'PQ) = \underline{\dfrac{a(a^2+1)}{8}}$

$T = (\text{台形 } AOP'P) - \int_0^a \frac{1}{2}x^2\,dx = \underline{\dfrac{a(a^2+3)}{12}}$

このとき、

$S - T = \dfrac{a(a^2+1)}{8} - \dfrac{a(a^2+3)}{12} = \underline{\dfrac{a(a^2-3)}{24}}$ $(= g(a)$ とおく$)$

$S-T>0$となるとき、

$a^2 - 3 > 0$　∴ $\underline{a > \sqrt{3}\ (\because a>0)}$

また、$g'(a) = \frac{1}{8}(a-1)(a+1)$ であるから、増減は下の様になる。

a	0		1	
$g'(a)$		−	0	+
$g(a)$		↘		↗

したがって、

$\underline{a=1\text{ のとき}}$

最小値 $g(1) = \underline{-\frac{1}{12}}$

第3問

(1) 2^n を順に書くと $2, 4, 8, 16, 32, \cdots$ $\therefore$ $\underline{a_2=4,\ a_3=8,\ a_4=6,\ a_5=2}$

数列$\{a_n\}$は4つ先の項と等しいから、 $\underline{a_{n+4}=a_n}$ ③

(2) $b_{n+4}=\dfrac{a_{n+3}}{4}b_{n+3}=\dfrac{a_{n+3}}{4}\cdot\dfrac{a_{n+2}}{4}b_{n+2}=\cdots=\dfrac{a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n}{4^4}b_n=\underline{\dfrac{a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n}{2^8}b_n}$

$a_{n+4}=a_n$ より、

$$a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n=a_4a_3a_2a_1=6\cdot8\cdot4\cdot2=\underline{3\cdot2^7}$$

よって、

$$b_{n+4}=\frac{3\cdot2^7}{2^8}b_n=\underline{\frac{3}{2}b_n}$$

これを解くと、

$$b_{4k-3}=b_1\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=\underline{\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}},\quad b_{4k-2}=b_2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}}$$

$$b_{4k-1}=b_3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}},\quad b_{4k}=b_4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=\underline{\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}}$$

(3) $S_{4m}=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k})=\sum_{k=1}^{m}3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=\frac{3\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^m-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}=\underline{6\left(\frac{3}{2}\right)^m-6}$

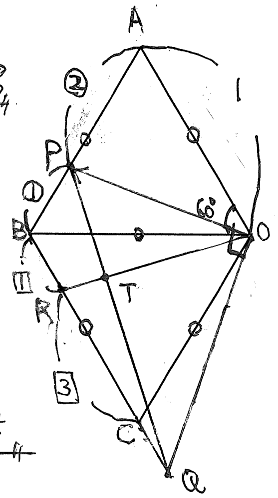
(4) $b_{4k-3}b_{4k-2}b_{4k-1}b_{4k}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}=\underline{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{4(k-1)}}$

$$T_{4m}=(b_1\cdot b_2\cdot b_3b_4)\cdot(b_5b_6\cdot b_7b_8)\cdots(b_{4m-3}b_{4m-2}b_{4m-1}b_{4m})$$

$$=\frac{1}{4^m}\left(\frac{3}{2}\right)^{4\{0+1+2+\cdots+(m-1)\}}=\frac{1}{4^m}\left(\frac{3}{2}\right)^{4\cdot\frac{1}{2}m(m-1)}=\underline{\frac{1}{4^m}\left(\frac{3}{2}\right)^{2m^2-2m}}$$

$$\therefore T_{10}=T_8\cdot b_9\cdot b_{10}=\frac{1}{4^2}\left(\frac{3}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2=\underline{\frac{3^8}{2^{13}}}$$

第4問



(1) $AP:PB=2:1$ より、 $\underline{\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}}$

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ より、 $\overrightarrow{OQ}=(1-t)\vec{b}+t(\vec{b}-\vec{a})=\underline{-t\vec{a}+\vec{b}}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\underline{\frac{1}{2}}$, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\underline{0}$ ($\because \overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OQ}$)

よって、 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\{-t|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2+(1-2t)\vec{a}\cdot\vec{b}\}=0$

$$\therefore t=\underline{\frac{5}{4}}$$

また、 $|\overrightarrow{OP}|^2=\frac{1}{9}(|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b})=\frac{7}{9}$ $\therefore \underline{|\overrightarrow{OP}|=\frac{\sqrt{7}}{3}}$

$|\overrightarrow{OQ}|^2=\frac{1}{16}(16|\vec{b}|^2+25|\vec{a}|^2-40\vec{a}\cdot\vec{b})=\frac{21}{16}$ $\therefore \underline{|\overrightarrow{OQ}|=\frac{\sqrt{21}}{4}}$

$$S_1=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|=\underline{\frac{7}{24}\sqrt{3}}$$

(2) $\overrightarrow{OT}=r\overrightarrow{OR}=-\frac{r}{4}\vec{a}+r\vec{b}$, $\overrightarrow{OT}=(1-s)\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{1}{3}-\frac{19}{12}s\right)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}s\right)\vec{b}$

$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ より係数比較して、

$$\underline{s=\frac{1}{3},\ r=\frac{7}{9}},\quad \underline{\overrightarrow{OT}=-\frac{7}{36}\vec{a}+\frac{7}{9}\vec{b}}$$

$OT:TR=7:2$, $PT:TQ=1:2$ より、

$S_2=\triangle PRT=\frac{2}{7}\triangle OPT=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{3}\triangle OPQ=\frac{2}{21}\triangle OPQ$ $\therefore$ $\underline{S_1:S_2=21:2}$