# 2014年度　センター試験　数学Ⅱ・B（本試験）　ワンポイント解説

## 第1問

### [1]

直線 $\ell : y = \frac{4}{3}x$

(1) (求める直線の傾き)×($\ell$の傾き) $= -1$ より 求める直線の傾きは $-\frac{3}{4}$

点P$(p, q)$を通り傾き$-\frac{3}{4}$の直線は

$y - q = -\frac{3}{4}(x-p)$　　∴ $y = -\frac{3}{4}(x-p)+q$

求めた垂線と $\ell$ の交点Q の$x$座標は連立して

$\frac{4}{3}x = -\frac{3}{4}(x-p)+q$　　∴ $x = \frac{3}{25}(3p+4q)$

半径 $r$ は PQに等しいので 点Pと $\ell$ のキョリより

$$r = \frac{|4p-3q|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{1}{5}|4p-3q|$$

(2) 円C が $x$軸に接するので 半径$r$は点Pの$y$座標に等しい

$q = \frac{1}{5}|4p-3q|$ かつ $p>0$, $q>0$ より $p = 2q$

円Cは $(x-2q)^2+(y-q)^2 = q^2$

これが点R$(2,2)$を通るので代入して $q = 1, 2$

$q = 1$ のとき 円Cは $(x-2)^2+(y-1)^2 = 1$ ---- ②

$q = 2$ のとき 円Cは $(x-4)^2+(y-2)^2 = 4$ ---- ③

(3) ②の中心S$(2,1)$、③の中心T$(4,2)$より

点Oは線分STを1：2に外分する

### [2]

自然数 $m, n$，$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 \leqq 3$ つまり $3\log_2 m + 2\log_3 n \leqq 3$ --- ④

$m = 2$, $n = 1$ のとき $3\cdot\log_2 2 + 2\cdot\log_3 1 = 3$

$m = 4$, $n = 3$ のとき $3\cdot\log_2 4 + 2\cdot\log_3 3 = 8$

④を変形して $\log_2 m + \frac{2}{3}\log_3 n \leqq 1$ --- ⑤

$n$が自然数のとき $\log_3 n$ のとりうる最小値は $\log_3 1 = 0$

⑤は $\log_2 m \leqq 1$ となり，$m = 1$ または $m = 2$

$m = 1$ のとき ⑤は $\log_3 n \leqq \frac{3}{2}$ となり，$\log_3 n^2 \leqq \log_3 3^3$ と

変形できるので，$n^2 \leqq 27$　$n$は自然数より $n \leqq 5$

よって $m = 1$ のとき $m, n$ の組の個数は 5

同様に，$m = 2$ のとき ⑤は $\log_3 n \leqq 0$ となり これを満たす自然数$n$は 1のみ

よって $m = 2$ のとき $m, n$ の組の個数は 1

以上より ④を満たす自然数 $m, n$ の組の個数は $5 + 1 = 6$

**第2問**

(1)

$f(x)=x^3-px$

$f'(x)=3x^2-p$

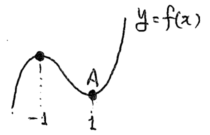
$f(x)$が$x=a$で極値をとるので、$f'(a)=3a^2-p=0$

また、3次関数$f(x)$が極値を持つには、$f'(x)=0$が異なる2つの実数解を持たなければならないので、$p>0$ つまり①を満たさなければならない

(2)

$f(x)$が$x=\frac{p}{3}$で極値をとることより、$f'\left(\frac{p}{3}\right)=\frac{p^2}{3}-p=0$ $\quad\therefore p=3$ ($p>0$より)

このとき、$f(x)=x^3-3x$ , $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ となり




$f(x)$は$x=-1$で極大値、$x=1$で極小値をとる

接点の$x$座標を$b$とすると、接線$\ell$の式は

$y-f(b)=f'(b)(x-b)$ $\quad\therefore y=(3b^2-3)(x-b)+f(b)$

これが点A$(1,-2)$を通るので代入して

$-2=(3b^2-3)(1-b)+(b^3-3b)$ $\quad\therefore 2b^3-3b^2+1=0$

これを解いて、$b=1,-\frac{1}{2}$

$\ell$の傾きが0でないことより、$b\neq1$ つまり$b=-\frac{1}{2}$. $\quad\therefore\ell$は$y=-\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}$

点A$(1,-2)$を頂点として原点Oを通る放物線Dは

$y=2(x-1)^2-2=2x^2-4x$

放物線Dと直線$\ell$, $x\geqq0$で囲まれた面積$S$は

$S=\int_0^1\left\{\left(-\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}\right)-(2x^2-4x)\right\}dx=\frac{11}{24}$

**第3問**

(1)

$a_2=15$, $a_3=28$

数列$\{a_n\}$の階差数列は初項9,公差4の等差数列より

第$n$項が$9+4(n-1)=4n+5$

よって、数列$\{a_n\}$の一般項は

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+5)=2n^2+3n+1$ ($n=1$でも成立)

(2)

数列$\{b_n\}$は、初項$b_1=\frac{2}{5}$より$b_2=\frac{a_1}{a_2-1}b_1=\frac{6}{35}$

$b_{n+1}=\frac{a_n}{a_{n+1}-1}b_n=\frac{2n+1}{2n+5}b_n$

ここで$c_n=(2n+1)b_n$とおくと、$c_{n+1}=(2n+3)b_{n+1}$となり

$\frac{c_{n+1}}{2n+3}=\frac{2n+1}{2n+5}\cdot\frac{c_n}{2n+1}$ $\quad\therefore(2n+5)\cdot c_{n+1}=(2n+3)c_n$

| | | |
|---|---|---|
| | | これにより，$d_n=(2n+3)c_n$ とおくと $d_{n+1}=(2n+5)c_{n+1}$ となり<br>すべての自然数 $n$ に対して $d_{n+1}=d_n$ が成り立つ。<br>$d_1=(2\cdot1+3)c_1=5\times(2\cdot1+1)b_1=5\times3\times\frac{2}{5}=6$　$\therefore d_n=6$<br>よって $6=(2n+3)c_n$ より $c_n=\frac{6}{2n+3}$<br>更に $\frac{6}{2n+3}=(2n+1)b_n$ より $b_n=\frac{6}{(2n+1)(2n+3)}$<br>ここで $b_n$ は<br>$b_n=\frac{6}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{3}{2n+1}-\frac{3}{2n+3}$ と変形できることにより<br>$S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$<br>$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2k+1}-\frac{3}{2k+3}\right)$<br>$=\left(\frac{3}{3}-\cancel{\frac{3}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{3}{5}}-\cancel{\frac{3}{7}}\right)+\cdots\cdots+\left(\cancel{\frac{3}{2n+1}}-\frac{3}{2n+3}\right)$<br>$=1-\frac{3}{2n+3}$<br>$=\frac{2n}{2n+3}$ |
| 第4問 | (1) | 条件より K(0,0,2)，L(1,0,0) であるから，<br>$\overrightarrow{LK}=(-1,0,2)$<br>また，四角形KLMNが平行四辺形であるから，$\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{MN}$ ③<br>$M(3,3,s)$，$N(t,3,3)$ より $\overrightarrow{MN}=(t-3,0,3-s)$<br>$\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{MN}=(-1,0,2)$ より $\begin{cases}t-3=-1\\3-s=2\end{cases}$　$\therefore s=1,\ t=2$<br>このとき $N(2,3,3)$ であるから Nは FGを 1:2 に内分する<br>また，$\overrightarrow{LM}=(2,3,1)$ より $\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{LM}=0$，$\lvert\overrightarrow{LK}\rvert=\sqrt{5}$，$\lvert\overrightarrow{LM}\rvert=\sqrt{14}$<br>四角形KLMNは長方形であるから，面積は $LK\times LM=\sqrt{70}$ |
| | (2) | $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{LM}=0$ より，<br>$-p+2r=2p+3q+r=0$　$\therefore p=2r$，$q=-\frac{5}{3}r$ ……(*)<br>$\overrightarrow{PL}=(1-p,-q,-r)$，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PL}=0$ より，<br>$p(1-p)+q(-q)+r(-r)=0$　これに(*)を代入して $r=\frac{9}{35}$<br>このとき $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{35}(6,-5,3)$ より，$\lvert\overrightarrow{OP}\rvert=\frac{3}{35}\sqrt{70}$<br>$\therefore$ 三角錐OLMNの体積は $\frac{1}{3}\times\triangle LMN\times\lvert\overrightarrow{OP}\rvert=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{70}}{2}\times\frac{3}{35}\sqrt{70}=1$ |