

第1問 [1]

直線 $l: y = \frac{4}{3}x$

(1) (求める直線の傾き) × (lの傾き) = -1 より、求める直線の傾きは $-\frac{3}{4}$

点 $P(p, q)$ を通り傾き $-\frac{3}{4}$ の直線は

$$y - q = -\frac{3}{4}(x - p) \quad \therefore \underline{y = -\frac{3}{4}(x - p) + q}$$

求めた直線と l の交点 Q の x 座標は連立して

$$\frac{4}{3}x = -\frac{3}{4}(x - p) + q \quad \therefore \underline{x = \frac{3}{25}(3p + 4q)}$$

半径 r は PQ に等しいので、点 P と l のキヨリより

$$r = \frac{|4p - 3q|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \underline{\frac{1}{5}|4p - 3q|}$$

(2) 円 C が x 軸に接するので、半径 r は点 P の y 座標に等しい

$$q = \frac{1}{5}|4p - 3q| \quad p > 0, q > 0 \text{ より } \underline{p = 2q}$$

円 C は $(x - 2q)^2 + (y - q)^2 = q^2$

こゝから点 $R(2, 2)$ を通るので代入して $q = 1, 2$

$q = 1$ のとき、円 C は $\underline{(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1}$ ----- ②

$q = 2$ のとき、円 C は $\underline{(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4}$ ----- ③

(3) ② の中心 $S(2, 1)$, ③ の中心 $T(4, 2)$ より

点 O は線分 ST を $1:2$ に外分する

[2]

自然数 m, n , $\log_2 m^3 + \log_3 n^2 \leq 3$ つまり、 $3 \log_2 m + 2 \log_3 n \leq 3$ ----- ④

$m = 2, n = 1$ のとき、 $3 \cdot \log_2 2 + 2 \cdot \log_3 1 = \underline{3}$

$m = 4, n = 3$ のとき、 $3 \cdot \log_2 4 + 2 \cdot \log_3 3 = \underline{8}$

④ を変形して $\underline{\log_2 m + \frac{2}{3} \log_3 n \leq 1}$ ----- ⑤

m が自然数のとき、 $\log_3 n$ のとりうる最小値は $\log_3 1 = \underline{0}$

⑤ は $\log_2 m \leq 1$ となり、 $m = 1$ または $m = 2$

$m = 1$ のとき、⑤ は $\log_3 n \leq \frac{3}{2}$ となり、 $\log_3 n^2 \leq \log_3 3^3$ と

変形できるので、 $n^2 \leq 27$, n は自然数より $n \leq 5$

よって、 $m = 1$ のとき、 m, n の組の個数は 5

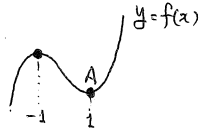
同様に、 $m = 2$ のとき、⑤ は $\log_3 n \leq 0$ となりこれを満たす自然数 n は 1 のみ

よって、 $m = 2$ のとき、 m, n の組の個数は 1

以上より、④ を満たす自然数 m, n の組の個数は $5 + 1 = \underline{6}$

第2問

- (1) $f(x) = x^3 - px$
 $f'(x) = 3x^2 - p$
 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるので、 $f'(a) = 3a^2 - p = 0$ 。
 また、3次関数 $f(x)$ が極値を持つには、 $f'(x) = 0$ が異なる2つの実数解を持つ必要がある。つまり、 $p > 0$ つまり①を満たさなければならない。
- (2) $f(x)$ が $x = \frac{p}{3}$ で極値をとることより、 $f'(\frac{p}{3}) = \frac{p^2}{3} - p = 0$ $\therefore p = 3$ ($p > 0$ より)
 このとき、 $f(x) = x^3 - 3x$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$ となり



$f(x)$ は $x = -1$ で極大値, $x = 1$ で極小値をとる

接点のx座標を b とすると、接線の式は

$$y - f(b) = f'(b)(x - b) \quad \therefore y = (3b^2 - 3)(x - b) + f(b)$$

これが点A(1, -2)を通るので代入して

$$-2 = (3b^2 - 3)(1 - b) + (b^3 - 3b) \quad \therefore 2b^3 - 3b^2 + 1 = 0$$

これを解いて、 $b = 1, -\frac{1}{2}$

lの傾きが0でないことより、 $b \neq 1$ となり $b = -\frac{1}{2}$

$$\therefore l \text{ は } y = -\frac{9}{4}x + \frac{1}{4}$$

点A(1, -2)を頂点とし、原点Oを通る放物線Dは

$$y = 2(x-1)^2 - 2 = 2x^2 - 4x$$

放物線Dと直線l, $x \geq 0$ で囲まれた面積Sは

$$S = \int_0^1 \left\{ \left(-\frac{9}{4}x + \frac{1}{4}\right) - (2x^2 - 4x) \right\} dx = \frac{11}{24}$$

第3問

- (1) $a_2 = 15, a_3 = 28$
 数列 $\{a_n\}$ の階差数列は初項9, 公差4の等差数列より
 第 m 項が $9 + 4(m-1) = 4m + 5$
 よって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_m = a_1 + \sum_{k=1}^{m-1} (4k+5) = 2m^2 + 3m + 1 \quad (m=1 \text{ でも成立})$$
- (2) 数列 $\{b_m\}$ は、初項 $b_1 = \frac{2}{5}$ より $b_2 = \frac{a_1}{a_2 - 1} b_1 = \frac{6}{35}$

$$b_{m+1} = \frac{a_m}{a_{m+1} - 1} b_m = \frac{2m+1}{2m+5} b_m$$

 ここで $C_m = (2m+1)b_m$ とおくと、 $C_{m+1} = (2m+3)b_{m+1}$ とおくと

$$\frac{C_{m+1}}{2m+3} = \frac{2m+1}{2m+5} \cdot \frac{C_m}{2m+1} \quad \therefore (2m+5) \cdot C_{m+1} = (2m+3) C_m$$

よって、 $d_m = (2m+3)C_m$ とおくと $d_{m+1} = (2m+5)C_{m+1}$ とおくと
 自然数 m に対して $d_{m+1} = d_m$ が成り立つ。

$$d_1 = (2 \cdot 1 + 3)C_1 = 5 \times (2 \cdot 1 + 1)b_1 = 5 \times 3 \times \frac{2}{5} = 6 \quad \therefore d_m = 6$$

$$\text{よって } 6 = (2m+3)C_m \text{ より } C_m = \frac{6}{2m+3}$$

$$\text{更に } \frac{6}{2m+3} = (2m+1)b_m \text{ より } b_m = \frac{6}{(2m+1)(2m+3)}$$

よって b_m は

$$b_m = \frac{6}{(2m+1)(2m+3)} = \frac{3}{2m+1} - \frac{3}{2m+3} \quad \text{と変形できることにより}$$

$$S_m = \sum_{k=1}^m b_k$$

$$= \sum_{k=1}^m \left(\frac{3}{2k+1} - \frac{3}{2k+3} \right)$$

$$= \left(\frac{3}{3} - \frac{3}{5} \right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{7} \right) + \dots + \left(\frac{3}{2m+1} - \frac{3}{2m+3} \right)$$

$$= 1 - \frac{3}{2m+3}$$

$$= \frac{2m}{2m+3}$$

第4問

(1)

条件より $K(0,0,2)$, $L(1,0,0)$ であるから、

$$\vec{LK} = (-1, 0, 2)$$

また、四角形 $KL MN$ が平行四辺形であるから、 $\vec{LK} = \vec{MN}$ ③

$$M(3,3,S), N(t,3,3) \text{ より } \vec{MN} = (t-3, 0, 3-S)$$

$$\vec{LK} = \vec{MN} = (-1, 0, 2) \text{ より } \begin{cases} t-3 = -1 \\ 3-S = 2 \end{cases} \quad \therefore \underline{S=1, t=2}$$

よって $N(2,3,3)$ であるから、 N は FG を $1:2$ に内分する

$$\text{また、} \vec{LM} = (2, 3, 1) \text{ より } \vec{LK} \cdot \vec{LM} = 0, |\vec{LK}| = \sqrt{5}, |\vec{LM}| = \sqrt{14}$$

四角形 $KL MN$ は長方形であるから、面積は $LK \times LM = \sqrt{70}$

(2)

$$\vec{OP} \cdot \vec{LK} = \vec{OP} \cdot \vec{LM} = 0 \text{ より、}$$

$$-p+2r = 2p+3q+r = 0 \quad \therefore \underline{p=2r}, \underline{q = -\frac{5}{3}r} \dots (*)$$

$$\vec{PL} = (1-p, -q, -r), \vec{OP} \cdot \vec{PL} = 0 \text{ より、}$$

$$p(1-p) + q(-q) + r(-r) = 0 \quad \text{よって (*) を代入して } r = \underline{\frac{9}{35}}$$

$$\text{よって } \vec{OP} = \frac{3}{35}(6, -5, 3) \text{ より、} |\vec{OP}| = \frac{3}{35}\sqrt{70}$$

$$\therefore \text{三角錐 } OLMN \text{ の体積は } \frac{1}{3} \times \Delta LMN \times |\vec{OP}| = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{70}}{2} \times \frac{3}{35}\sqrt{70} = \underline{1}$$