2014年度　センター試験　数学Ⅰ・A（本試験）　ワンポイント解説

第1問

[1]

(1) $a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$, $b=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$ より

$ab=\underline{2}$　$a+b=\underline{2(-1+\sqrt{6})}$

よって $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=\underline{8(3-\sqrt{6})}$

(2) $ab=2$ より $b=\dfrac{2}{a}$

これを $a^2+b^2+4(a+b)=\underline{16}$ に代入すると

$\underline{a^4+4a^3-16a^2+8a+4=0}$ が得られる.

[2]

(1) $5<\sqrt{n}<6$ より $25<n<36$　∴ Uの要素は $\underline{10個}$

$$\left.\begin{array}{ll}
P=\{28.32\} & \overline{P}=\{26.27.29.30.31.33.34.35\}\\
Q=\{30.35\} & \overline{Q}=\{26.27.28.29.31.32.33.34\}\\
R=\{30\} & \overline{R}=\{26.27.28.29.31.32.33.34.35\}\\
S=\{28.35\} & \overline{S}=\{26.27.29.30.31.32.33.34\}
\end{array}\right\}-(*)$$

(2) (*)より $P\cap R$ と $R\cap\overline{Q}$ $\underline{(⓪.④)}$ は空集合となる.

(3) ⓪: $P\cup R=\{28.30.32\}$
①: $S\cap\overline{Q}=\{28\}$
②: $\overline{Q}\cap\overline{S}=\overline{Q\cup S}=\{26.27.29.31.32.33.34\}$
③: $\overline{P}\cup\overline{Q}=\overline{P\cap Q}=U$
④: $\overline{R}\cap\overline{S}=\overline{R\cup S}=\{26.27.29.31.32.33.34\}$

よって $S\cap\overline{Q}\subset P$ と $\overline{R}\cap\overline{S}\subset\overline{Q}$ $\underline{(①.④)}$ は成立する

第2問

$y=x^2+2ax+3a^2-6a-36$
$=(x+a)^2+2a^2-6a-36$ より, 頂点 $\underline{(-a,\ 2a^2-6a-36)}$

(1) y軸との交点が -27 より

$3a^2-6a-36=-27$
$(a-3)(a+1)=0$　∴ $a=\underline{3,\ -1}$

$a=3$ のとき $y=(x+3)^2-36$

$a=-1$ のとき $y=(x-1)^2-28$

よって $a=3$ のときのグラフを $\underline{x軸方向に4,\ y軸方向に8}$ だけ平行移動すると $a=-1$ のときのグラフと一致する.

第3問

(2) Gがx軸と共有点を持つとき

頂点のy座標 $2a^2-6a-36\leqq 0$ より

$(a+3)(a-6)\leqq 0$ ∴ $-3\leqq a\leqq 6$

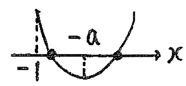
また $P=3a^2-6a-36=3(a-1)^2-39$ $(-3\leqq a\leqq 6)$ より

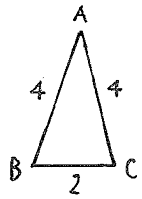
Pは $a=1$ で最小値 -39, $a=6$ で最大値 36 をとる

Gのx軸との共有点のx座標が−1より大となるのは

$$\begin{cases}\text{頂点のy座標} \leqq 0 \text{ より } -3\leqq a\leqq 6\\ \text{頂点のx座標} > -1 \text{ より } a<1\\ x=-1 \text{ のとき } y>0 \text{ より } a<-\frac{7}{3},\ 5<a\end{cases}$$

これらの共通部分をとり $-3\leqq a<-\frac{7}{3}$





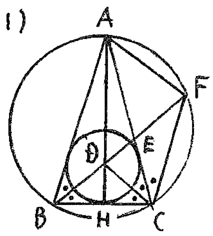
余弦定理を用いて

$CA=4$ $\cos\angle BAC=\frac{7}{8}$ よって $\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{15}}{8}$

外接円の半径をRとすると

正弦定理を用いて $R=\frac{8\sqrt{15}}{15}$

(1)



2等分線の定理より

$BA:BC=AE:EC=2:1$

∴ $AE=\frac{2}{3}AC=\frac{8}{3}$

また △ABEに余弦定理を用いて $BE=\frac{2\sqrt{10}}{3}$

$AH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{15}$. $AD:DH=AB:BH=4:1$ より

(2等分線の定理)

$DH=\frac{1}{5}AH=\frac{\sqrt{15}}{5}$

∴ $BD=\sqrt{DH^2+BH^2}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

(2) $\triangle EBC \backsim \triangle EAF$ より

$\frac{\triangle EBC}{\triangle EAF}=\left(\frac{BE}{AE}\right)^2=\frac{5}{8}$

(3) $\angle ABF=\angle CBF$ より $FA=FC$

$\angle FCD=\angle FDC$ より $FC=FD$

∴ $FA=FC=FD$ (④)

第4問

(1) ↙2コ ↓2コの並べ方で $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$通り

(2) ↙1コ ↓1コ ↘1コ の並べ方で $3! = 6$通り

(3) A→C, C→Bともに6通りであるから $6 \times 6 = 36$通り

6回の移動の仕方は全体で6^6通りあるから 確率は $\dfrac{36}{6^6} = \dfrac{1}{1296}$

(4) ・1の矢印の移動を含むのは、

1が1回、4が5回であるから $\dfrac{6!}{5!} = 6$通り －①

・2の矢印の移動を含むのは

2が1回、5が1回、4が4回であるから $\dfrac{6!}{4!} = 30$通り －②

・6の矢印の移動を含むものも 30通り －③

・上記以外の場合、4の矢印の移動は2回であり

残り3, 5がそれぞれ2回あるので

移動の仕方は $\dfrac{6!}{2!2!2!} = 90$通り －④

①+②+③+④より

6回移動してDにいる移動の仕方は 156通り