2013年度　センター試験　数学II・数学B　(本試験)　ワンポイント解説

第1問

[1]

(1) 分点の公式により

$\underline{P(4, 2)}$ 、 $\underline{Q(9, -3)}$

(2) OPの中点 $M(2, 1)$、OPの傾きが $\frac{1}{2}$ であることから

Mを通り、OPに垂直な直線は

$y = -2(x-2)+1$　　$\therefore \underline{y = -2x+5}$ …①

PQの中点 $N\left(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2}\right)$、PQの傾きが -1 であることから

Nを通り、PQに垂直な直線は

$y = 1\cdot\left(x - \frac{13}{2}\right) - \frac{1}{2}$　　$\therefore \underline{y = x-7}$ …②

円Cの中心は①、②の交点 $S(4, -3)$、半径は $OS = 5$ だから

円Cの方程式は

$$\underline{(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25}$$

(3) $R(8, 0)$ であるから

Rは線分OAを $8:2 = \underline{4:1}$ に外分する

[2]

$x = \log_2 X$, $y = \log_2 Y$, $z = \log_2 Z$ であるから

$x+y+z = 3$ より

$\log_2 X + \log_2 Y + \log_2 Z = 3$

$\log_2 XYZ = 3$　　$\therefore \underline{XYZ = 2^3 = 8}$

また　$\frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^y} + \frac{1}{2^z} = \frac{49}{16}$ より

$\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z} = \frac{XY+YZ+ZX}{XYZ} = \frac{49}{16}$

$\therefore \underline{XY+YZ+ZX = \frac{49}{2}}$

したがって

$t^3 - (X+Y+Z)t^2 + (XY+YZ+ZX)t - XYZ$

$= t^3 - \frac{35}{2}t^2 + \frac{49}{2}t - 8$

$= \underline{\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)(t-16)}$ …. (*)

(*)=0の3解は $t = X, Y, Z$ であるから

$X = \frac{1}{2}$、$Y = 1$、$Z = 16$ であり

$\underline{x = \log_2 X}$, $y = \log_2 Y$、$z = \log_2 Z$ から

$\underline{x = -1,\ y = 0,\ z = 4}$

第2問

$f(x) = x^3 - 3a^2x + a^3$, $f'(x) = 3(x+a)(x-a)$

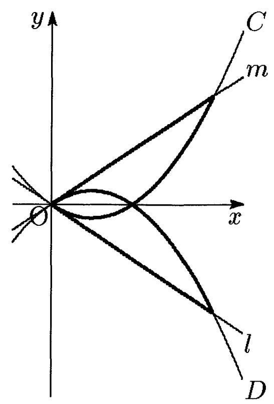
$x = -a$で極大値$3a^3$, $x = a$で極小値$-a^3$

原点を通る放物線を $y = px(x-q)$ とおく

点$(-a, 3a^3)$, 点$(a, -a^3)$を通るから, $\begin{cases} 3a^3 = p\cdot(-a)\cdot(-a-q) \\ -a^3 = pa(a-q) \end{cases}$ $\therefore p = a,\ q = 2a$

よって, $y = ax(x-2a) = ax^2 - 2a^2x$

l: $y = -2a^2x$, m: $y = \dfrac{1}{2a^2}x$, D: $y = -ax(x-2a) = -ax^2 + 2a^2x$



Dとlの交点は, $x = 0, 4a$

$S = \dfrac{|a|}{6}\times(4a-0)^3 = \dfrac{32a^4}{3}$ ← $\frac{1}{6}$公式

Cとmの交点は, $x = 0, \dfrac{4a^4+1}{2a^3}$

$T = \dfrac{|a|}{6}\left(\dfrac{4a^4+1}{2a^3} - 0\right)^3 = \dfrac{a}{6}\left(\dfrac{4a^4+1}{2a^3}\right)^3$ ← $\frac{1}{6}$公式

$S = T$のとき, $\dfrac{a}{6}(4a)^3 = \dfrac{a}{6}\left(\dfrac{4a^4+1}{2a^3}\right)^3$

$(4a)^3 = \left(\dfrac{4a^4+1}{2a^3}\right)^3$

$\therefore 4a = \dfrac{4a^4+1}{2a^3}$

$8a^4 = 4a^4 + 1$ $\therefore a^4 = \dfrac{1}{4}$

このとき, $S = \dfrac{32}{3}\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{8}{3}$

第3問

(1)

$p_1 = 3$ $p_{n+1} = \dfrac{1}{3}p_n + 1$

$-)$ $\alpha = \dfrac{1}{3}\alpha + 1 \to \alpha = \dfrac{3}{2}$

$p_{n+1} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{3}\left(p_n - \dfrac{3}{2}\right)$

これを解いて $p_n = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2\cdot 3^{n-2}} + \dfrac{3}{2}$

また $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \frac{3}{2}\right\} = \frac{9}{4}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) + \frac{3}{2}n$

(2)

$a_{n+3} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{a_{n+2}}$ −(*)に, 与えられた $a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = 3$ を用いると

$a_4 = \dfrac{a_1 + a_2}{a_3} = 2$, $a_6 = \dfrac{a_3 + a_4}{a_5} = \dfrac{5}{3}$

このとき $b_n = a_{2n-1}$, $c_n = a_{2n}$ とおいて

$b_{n+1} = b_n$ であることを数学的帰納法を用いて証明する

$n = k$のとき $b_{k+1} = b_k$ と仮定して

$n = k+1$のとき $b_{k+2} = b_{k+1}$ であることを示せばよい

(*)で $n=2k$ とすると　　(*)で $n=2k-1$ とすると

$$b_{k+2}=\frac{c_k+b_{k+1}}{c_{k+1}} \quad -(\mathrm{i}) \qquad c_{k+1}=\frac{b_k+c_k}{b_{k+1}} \quad -(\mathrm{ii})$$

(ii)を(i)に代入して

$$b_{k+2}=\frac{(c_k+b_{k+1})b_{k+1}}{b_k+c_k}=\frac{\cancel{(c_k+b_k)}b_{k+1}}{\cancel{b_k+c_k}} \quad (\because 仮定より\ b_{k+1}=b_k)$$

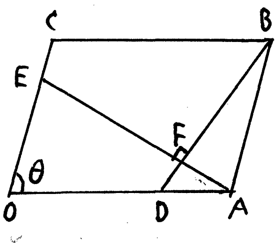
$=b_{k+1}$ よって $n=k+1$ でも成立

$\therefore b_{n+1}=b_n=3$ である

またこれを(ii)に代入すると $c_{n+1}=\frac{1}{3}c_n+1$. $c_1=a_1=3$ より $c_n=p_n$ となる

第4問

(1)



$\vec{OA}=\vec{a}$ $\vec{OC}=\vec{c}$ $\angle AOC=\theta$

$\vec{OE}=t\vec{c}$

(1) $\vec{AE}=\vec{OE}-\vec{OA}=t\vec{c}-\vec{a}$

$\vec{DB}=\vec{DA}+\vec{AB}=\frac{2}{5}\vec{a}+\vec{c}$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta=20\cos\theta$

$\vec{AE}\cdot\vec{DB}=0$ より $(t\vec{c}-\vec{a})\cdot(\frac{2}{5}\vec{a}+\vec{c})=0$ これを解いて $t=\dfrac{5(2\cos\theta+1)}{4(\cos\theta+2)}$ $-①$

(2)

①で $\cos\theta=r$ とおくと $0\leqq t\leqq 1$ のとき

$0\leqq\dfrac{5(2r+1)}{4(r+2)}\leqq 1$ より $-\frac{1}{2}\leqq r\leqq\frac{1}{2}$ $\therefore \frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{2\pi}{3}$

(3)

$\cos\theta=-\frac{1}{8}$ のとき. ①より $t=\frac{1}{2}$ $\therefore \vec{OE}=\frac{1}{2}\vec{c}$

$\vec{DF}=k\vec{DB}$, $AF:FE=s:(1-s)$ とおくことにより

$\vec{OF}=\vec{OD}+\vec{DF}=\frac{3+2k}{5}\vec{a}+k\vec{c}$

$\vec{OF}=(1-s)\vec{a}+\frac{s}{2}\vec{c}$

これより $s=\frac{1}{3}$, $k=\frac{1}{6}$ $\therefore \vec{OF}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{c}$

このとき $AF:FE=1:2$ となり

$\square OABC=OA\cdot OC\sin\theta=5\cdot 4\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{15\sqrt{7}}{2}$ より

$\triangle DEF=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\square OABC=\frac{5\sqrt{7}}{2}$