2013年度 センター試験 数学Ⅰ・数学A (本試験) ワンポイント解説

第1問

[1]

$$AB = \frac{1}{\{(1+\sqrt{6})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{6})-\sqrt{3}\}}$$
$$= \frac{1}{(1+\sqrt{6})^2-3}$$
$$= \frac{1}{2(\sqrt{6}+2)}$$
$$= \frac{\sqrt{6}-2}{4}$$

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B} = 2+2\sqrt{6} \quad \cdots ①$$

①より

$$\frac{B+A}{AB} = 2+2\sqrt{6}$$
$$\therefore\ A+B = 2(\sqrt{6}+1)AB = \frac{4-\sqrt{6}}{2}$$

[2]

(1) 対偶は「($\bar{p}$ かつ $\bar{q}$) $\Longrightarrow$ $\bar{r}$」①

(2) 命題「(p または q) $\Longrightarrow$ r」の反例は ①④

まず $\bar{r}$: 45°の内角が少なくとも1つある三角形に着目し,

次に内角がすべて異なるか直角三角形でないものを選べばよい

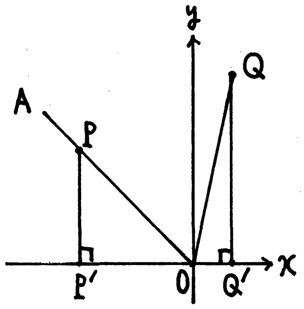
(3) (2)より, r は (p または q) であるための必要条件ではない

命題「r $\Longrightarrow$ (p または q)」の

対偶「直角三角形で等しい内角がある $\Longrightarrow$ 45°の内角がある」は真

よって, r は (p または q) であるための十分条件である ②

第2問



P$(2t-8,\ -2t+8)$, Q$(t,\ 10t)$

Pが0に到達するのは

Pのx座標 $2t-8=0$ のとき

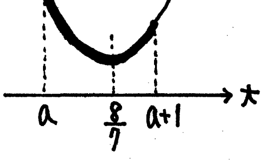
$\therefore\ t=4$

(1) $OP' = PP' = -2t+8$, $OQ' = t$, $QQ' = 10t$

$$S = \frac{1}{2}\times OP'\times PP' + \frac{1}{2}\times OQ'\times QQ'$$
$$= 7t^2-16t+32$$
$$= 7\left(t-\frac{8}{7}\right)^2+\frac{160}{7}$$

$t=\frac{8}{7}$ で S は最小値 $\frac{160}{7}$

(i)



Sが $t=\frac{8}{7}$ で最小となるのは

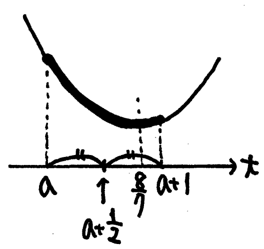
頂点が区間内のとき

$a \leqq \frac{8}{7} \leqq a+1$

$\therefore\ \frac{1}{7} \leqq a \leqq \frac{8}{7}$

第2問

(ii)



Sが $t=a$ で最大となるのは
軸が区間の中央より右のとき
$a+\frac{1}{2} \leqq \frac{8}{7}$
$\therefore\ 0<a\leqq \frac{9}{14}$

(2) $y=2x^2$ を平行移動したもので、Oを通る放物線は
$y=2x^2+bx$ とおける

これがP, Qを通るとき

$$\begin{cases} -(2t-8)=2(2t-8)^2+b(2t-8) & \cdots① \\ 10t=2t^2+bt & \cdots② \end{cases}$$

$t\neq 0,\ t\neq 4$ より、①,②は

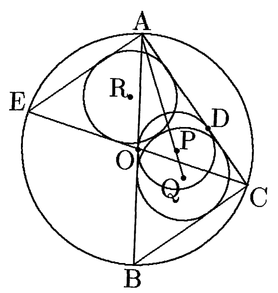
$$\begin{cases} -1=2(2t-8)+b \\ 10=2t+b \end{cases}$$

$\therefore\ t=\frac{5}{2},\ b=5$

このとき、$y=2x^2+bx=2x^2+5x=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$

頂点の座標に着目し、$y=2x^2$ を x 軸方向に $-\frac{5}{4}$, y 軸方向に $-\frac{25}{8}$ だけ
平行移動すればよい

第3問



直角三角形OAPで

$AP=\sqrt{OP^2+OA^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\angle OAP=\theta$ とすると、$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$

ODとAPの交点をMとすると

$OD=2OM=2OA\sin\theta=\frac{3\sqrt{10}}{5}$

△OADで余弦定理より

$\cos(\angle OAD)=\frac{4}{5}\ \ (=\cos 2\theta)$

$\therefore\ \sin 2\theta=\frac{3}{5}$

直角三角形ABCで

$AC=AB\cos 2\theta=\frac{24}{5}$, $BC=AB\sin 2\theta=\frac{18}{5}$

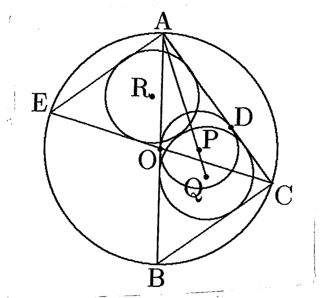
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times BC\times AC=\frac{216}{25}$

内接円の半径を r とすると

$r=\frac{2\times\triangle ABC}{AB+BC+CA}=\frac{6}{5}$

第3問

(1)



Q, R から AC に下ろした垂線の足を H, H′ とすると

$QR = AC - AH' - CH$

$= AC - r - r = \dfrac{12}{5}$

(中心間の距離QR) = (2円の半径の和) であるから

2つの円は外接する ②

(2) 直角三角形AQHで

$AQ = \dfrac{QH}{\sin\theta} = \dfrac{r}{\sin\theta} = \dfrac{6\sqrt{10}}{5}$

P, Q は ∠OAD の二等分線上の点で

$PQ = AQ - AP = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

PQ < (円Pの半径), PQ < (円Qの半径) であるから

Qは円Pの内部, Pは円Qの内部にある ②

第4問

(1) 千の位, 百の位, 十の位, 一の位　それぞれ4通りずつ

$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ 通り

(2) 千の位, 百の位, 十の位, 一の位を順に選び

$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 通り

(3) 問題文の通りに　(i) ${}_4C_2 = 6$ 通り　(ii) ${}_4C_2 = 6$ 通り　(iii) $6 \times 6 = 36$ 通り

(4) (i) 9点となるのは、1111, 2222, 3333, 4444 の4通り　確率 $\dfrac{4}{4^4} = \dfrac{1}{64}$

3点となるのは、(3)(iii)より、36通り　確率 $\dfrac{36}{4^4} = \dfrac{9}{64}$

(ii) 2点となるのは、(3)と同様に考えて、3回現れる数字, 1回現れる数字を選び、

3回現れる数字を置く位置を決めて、${}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_4C_3 = 48$ 通り　確率 $\dfrac{48}{4^4} = \dfrac{3}{16}$

0点となるのは、(2)より、24通り　確率 $\dfrac{24}{4^4}$

1点となるのは、余事象を利用して、　確率 $\dfrac{144}{4^4} = \dfrac{9}{16}$

(iii) $\dfrac{1}{4^4} \times (9 \times 4 + 3 \times 36 + 2 \times 48 + 1 \times 144)$

$= \dfrac{4}{4^4} \times (9 + 27 + 24 + 36)$

$= \dfrac{3}{2}$