第1問

[1]

真数条件より

$8-x>0$ かつ $x-2>0$　　∴ $2<x<8$ …③

$a<1$ のとき ①より $\log_a(8-x)^2 > \log_a(x-2)$

$$(8-x)^2 < x-2$$

$$x^2-17x+66<0$$

$$\therefore\ 6<x<11 \quad \cdots ④$$

③,④より $6<x<8$

$a>1$ のときも、同様にして

$$2<x<6$$

[2]

$\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ のとき

$\cos 2\beta = \frac{1}{2}$ を解いて　$\beta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

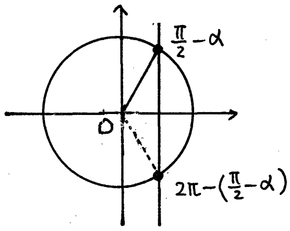
$0 \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\cos 2\beta = \sin\alpha$$

$$\cos 2\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$2\beta = \frac{\pi}{2}-\alpha,\ 2\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$\therefore\ \beta_1 = \frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2},\quad \beta_2 = \frac{3}{4}\pi+\frac{\alpha}{2}$$



$\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \pi$ のとき

上と同様にして　$\beta_1 = -\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2},\quad \beta_2 = \frac{5}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}$

したがって

$$\alpha+\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{3} = \begin{cases} \frac{11}{12}\alpha+\frac{3}{8}\pi & \left(0 \leqq \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ のとき}\right) \\ \frac{13}{12}\alpha+\frac{7}{24}\pi & \left(\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \pi \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

であるから、

$$\frac{3}{8}\pi \leqq \alpha+\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{3} \leqq \frac{11}{8}\pi$$

y が最大となるのは

$$\alpha+\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{3} = \frac{\pi}{2}$$

∴ $\alpha = \frac{3}{22}\pi$ のとき

このときの値は $y=1$

第2問

(1) C上の点 $P(a, a^3)$ における接線は $\underline{y=3a^2x-2a^3}$ …③

Dの点 P における接線は $y=(2a+p)x-a^2+q$ …④

③,④が一致することより

$$\begin{cases} p=3a^2-2a \\ q=-2a^3+a^2 \end{cases}$$

(2) DがQ$(0, b)$を通るので、代入して $\underline{b=-2a^3+a^2}$

$f(x)=-2x^3+x^2$

$f'(x)=-2x(3x-1)$ より 増減は右表

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{1}{27}$	↘

よって、$\underline{x=0 \text{ で極小値 } 0,\ x=\frac{1}{3} \text{ で極大値 } \frac{1}{27}}$

グラフより

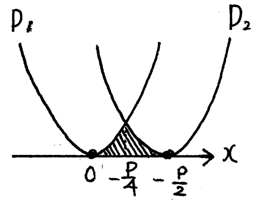
$0<b<\frac{1}{27}$ のとき、aの個数は $\underline{3個}$

(3) Dの頂点がx軸上となるのは

頂点のy座標 $=-\frac{p^2}{4}+q=0$ より $\underline{a=0,\ \frac{4}{9}}$

D_1とD_2は右図のようになるから、

対称性を利用して



面積は $2\int_0^{-\frac{p}{4}} x^2\,dx=\frac{2}{3}\left[x^3\right]_0^{-\frac{p}{4}}=\underline{\frac{2^4}{3^{10}}}$

第3問

$a_2=-\frac{7}{3}$, $a_5=-\frac{25}{3}$ を $a_n=a_1+(n-1)d$ に代入し $\underline{a_1=\frac{-1}{3}}$ $\underline{d=-2}$

よって $\underline{a_n=-2n+\frac{5}{3}}$, また $\underline{S_n=-n^2+\frac{2}{3}n}$

$\sum_{k=1}^{n} b_k=\frac{4}{3}b_n+S_n$ $n=1$として $b_1=\frac{4}{3}b_1+S_1$ より $\underline{b_1=1}$ $(\because S_1=a_1=\frac{-1}{3})$

$\sum_{k=1}^{n+1} b_k=\sum_{k=1}^{n} b_k+b_{n+1}$ より

$\frac{4}{3}b_{n+1}+S_{n+1}=\frac{4}{3}b_n+S_n+b_{n+1}$ これより $\underline{b_{n+1}=4b_n+6n+1}$ —(*)

(*)は $\underbrace{b_{n+1}+2(n+1)+1}_{n+1}=\underbrace{4}_{公比}\underbrace{(b_n+2n+1)}_{n}$ と変形できて

$c_n=\underbrace{b_n+2n+1}_{n}$ とおくと $c_1=b_1+2\times1+1=4$ であり

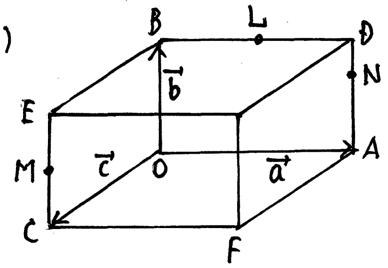
$c_{n+1}=4c_n$ より $c_n=4\cdot4^{n-1}=4^n$

$b_n+2n+1=4^n$

$\therefore \underline{b_n=4^n-2n-1}$

第4問

(1)



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$. $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

$\overrightarrow{ON}=\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$

(2) FP : PL $= s:(1-s)$ のとき

$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OF}+s\overrightarrow{OL}$

$=(1-\frac{s}{2})\vec{a}+s\vec{b}+(1-s)\vec{c}$

$\overrightarrow{MP}=k\overrightarrow{MN}$ のとき. M.N.P 一直線上なので

$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=(1-\frac{s}{2})\vec{a}+(s-\frac{1}{2})\vec{b}-s\vec{c}$

$k\overrightarrow{MN}=k(\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{c})$

係数を比較して

$s=\frac{2}{3}$, $k=\frac{2}{3}$ $\therefore \overrightarrow{MP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$

(3) FL. MN の交点 G

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})$ $\overrightarrow{GF}=\frac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c})$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ $\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ に注意して

内積を利用すると $|\overrightarrow{GF}|=3$ $\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GH}=2t+\frac{16}{3}$ — ① $\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{GH}=2t+\frac{10}{3}$ — ②

一方 $\angle FGH=\angle MGH$ より

$\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GH}:\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{GH}=|\overrightarrow{GF}|:|\overrightarrow{GM}|=3:2$

$\therefore \overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{GH}$ — ③

①. ②. ③ より $t=\frac{1}{3}$