

第1問

[1]

真数条件より

$$8-x > 0 \text{ かつ } x-2 > 0 \quad \therefore 2 < x < 8 \quad \# \dots ③$$

$$a < 1 \text{ のとき } ① \text{ より } \log_a(8-x)^2 > \log_a(x-2)$$

$$(8-x)^2 < x-2$$

$$\underline{x^2 - 17x + 66 < 0 \quad \#}$$

$$\therefore 6 < x < 11 \quad \# \dots ④$$

$$③, ④ \text{ より } \underline{6 < x < 8 \quad \#}$$

$a > 1$  のときも同様にして

$$\underline{2 < x < 6 \quad \#}$$

[2]

$$\sin \alpha = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ のとき}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{2} \text{ を解いて } \underline{\beta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad \#}$$

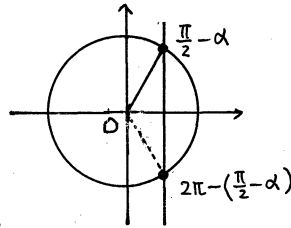
$$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ のとき}$$

$$\cos 2\beta = \sin \alpha$$

$$\cos 2\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$2\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha, 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\therefore \underline{\beta_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}, \beta_2 = \frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \quad \#}$$



$$\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \text{ のとき}$$

$$\text{上と同様にして } \underline{\beta_1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}, \beta_2 = \frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \quad \#}$$

したがって

$$\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} = \begin{cases} \frac{11}{12}\alpha + \frac{3}{8}\pi & (0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ のとき}) \\ \frac{13}{12}\alpha + \frac{7}{24}\pi & (\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

2'あるから

$$\underline{\frac{3}{8}\pi \leq \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} \leq \frac{11}{8}\pi \quad \#}$$

yが最大となるのは

$$\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \underline{\alpha = \frac{3}{22}\pi \quad \#} \text{ のとき}$$

$$\text{このときの値は } \underline{y = 1 \quad \#}$$

第2問

(1) C上の点  $P(a, a^2)$  における接線は  $y = 3a^2x - 2a^3$  ... ③  
 Dの点  $P$  における接線は  $y = (2a+p)x - a^2 + 8$  ... ④

③④が一致することより

$$\begin{cases} p = 3a^2 - 2a \\ q = -2a^2 + a^2 \end{cases}$$

(2) Dが  $Q(0, 8)$  を通るので、代入して  $8 = -2a^3 + a^2$

$$f(x) = -2x^3 + x^2$$

$$f'(x) = -2x(3x-1)$$

増減は右表  
 よって、 $x=0$  で極小値  $0$ ,  $x=\frac{1}{3}$  で極大値  $\frac{1}{27}$

グラフより

$0 < 8 < \frac{1}{27}$  のとき、 $a$  の個数は 3個

$x$	...	0	...	$\frac{1}{3}$	...
$f(x)$	-	0	+	0	-
$f'(x)$		$\searrow$ 0		$\nearrow$ 0	$\searrow$

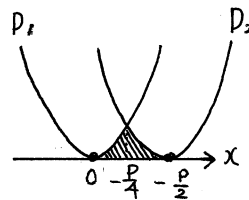
(3) Dの頂点が  $x$  軸上となるのは

$$\text{頂点の } y \text{ 座標} = -\frac{p^2}{4} + 8 = 0 \text{ より } a = 0, \frac{4}{9}$$

$D_1$  と  $D_2$  は右図のようになるから、

対称性を利用して

$$\text{面積は } 2 \int_0^{-\frac{p}{4}} x^3 dx = \frac{2}{3} [x^3]_0^{-\frac{p}{4}} = \frac{2^4}{3^{10}}$$



第3問

$$a_2 = -\frac{2}{3}, a_5 = -\frac{25}{3} \text{ 且 } a_n = a_1 + (n-1)d \text{ として } a_1 = \frac{-1}{3}, d = -2$$

$$\text{よって } a_n = -2n + \frac{5}{3}, \text{ 且 } S_n = -n^2 + \frac{2}{3}n$$

$$\sum_{k=1}^n b_k = \frac{4}{3} b_n + S_n$$

$$n=1 \text{ と } n=2 \text{ より } b_1 = \frac{4}{3} b_1 + S_1 \text{ より } b_1 = 1 \text{ (} \because S_1 = a_1 = \frac{-1}{3} \text{)}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} b_k = \sum_{k=1}^n b_k + b_{n+1} \text{ より}$$

$$\frac{4}{3} b_{n+1} + S_{n+1} = \frac{4}{3} b_n + S_n + b_{n+1} \text{ となり } b_{n+1} = 4b_n + 6n + 1 \text{ (*)}$$

$$\text{(*)は } \underbrace{b_{n+1}}_{(n+1)} + 2 \underbrace{(n+1)}_{\text{公比}} \underbrace{b_n}_{(n)} + 1 = 4(b_n + 2n + 1) \text{ と変形して}$$

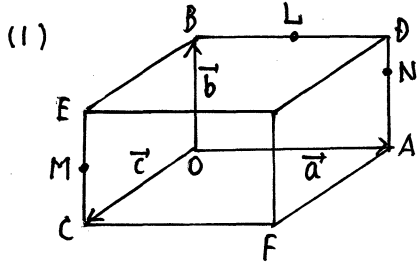
$$C_n = \underbrace{b_n + 2n + 1}_{(n)} \text{ とおくと } C_1 = b_1 + 2 \times 1 + 1 = 4 \text{ であり}$$

$$C_{n+1} = 4C_n \text{ より } C_n = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n$$

$$\underline{b_n + 2n + 1 = 4^n}$$

$$\therefore \underline{b_n = 4^n - 2n - 1}$$

第4問



$$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{ON} = \vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

(2) FP:PL = s:(1-s) のとき

$$\vec{OP} = (1-s)\vec{OF} + s\vec{OL}$$

$$= (1-\frac{s}{2})\vec{a} + s\vec{b} + (1-s)\vec{c}$$

$\vec{MP} = k\vec{MN}$  のとき. M, N, P - 直線上の点.

$$\vec{MP} = \vec{OP} - \vec{OM} = (1-\frac{s}{2})\vec{a} + (s-\frac{1}{2})\vec{b} - s\vec{c}$$

$$k\vec{MN} = k(\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{c})$$

係数を比較して

$$s = \frac{2}{3}, k = \frac{2}{3} \therefore \vec{MP} = \frac{2}{3}\vec{MN}$$

(3) FL, MN の交点 G

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(2\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c})$$

$$\vec{GF} = \frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c})$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = 0, \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$  に注意して

内積を利用すると  $|\vec{GF}| = 3$

$$\vec{GF} \cdot \vec{GH} = 2t + \frac{16}{3} \quad \text{①}$$

$$\vec{GM} \cdot \vec{GH} = 2t + \frac{10}{3} \quad \text{②}$$

一方  $\angle FGH = \angle MGH$  より

$$\vec{GF} \cdot \vec{GH} : \vec{GM} \cdot \vec{GH} = |\vec{GF}| : |\vec{GM}| = 3 : 2$$

$$\therefore \vec{GF} \cdot \vec{GH} = \frac{3}{2} \vec{GM} \cdot \vec{GH} \quad \text{③}$$

①, ②, ③ より  $t = \frac{1}{3}$